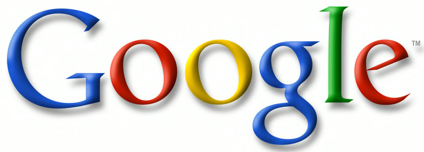




LE CALCUL VECTORIEL

ET SES

APPLICATIONS

I

VERDUN, IMPRIMERIE L. LAURENT FILS, ÉDITEUR
12 et 14, quai de la République

LE CALCUL VECTORIEL

ET

SES APPLICATIONS

EN GÉOMÉTRIE ET EN MÉCANIQUE

PAR

G. NÉDÉLEC

PREMIER VOLUME



PARIS

GAUTHIER-VILLARS & FILS, ÉDITEURS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

1897

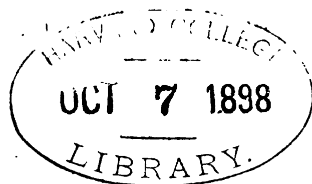

HARVARD COLLEGE
OCT 7 1898
LIBRARY.

TABLE ANALYTIQUE

DU PREMIER VOLUME

PREMIÈRE PARTIE

LES PRINCIPES GÉNÉRAUX DU CALCUL VECTORIEL

INTRODUCTION

CHAPITRE II

Notions générales sur les vecteurs

§ I. — DÉFINITION DES VECTEURS

§ II. — ADDITION VECTORIELLE

§ III. — ADDITION VERSORIELLE

§ IV. — LA FONCTION EXPONENTIELLE LINÉAIRE

CHAPITRE III

Théorie des verseurs

§ I. — VERSEURS QUADRANTS RECTANGULAIRES

§ II. — VERSEURS QUADRANTS OBLIQUES

CHAPITRE IV

Calcul des verseurs quaternions

CHAPITRE V

Multiplication vectorielle

§ IV. — Quaternions coordonnés

CHAPITRE VI

Sommation vectorielle

§ I. — Méthode algébrique

§ II. — Méthode géométrique

DEUXIÈME PARTIE

Théorie des fonctions vectorielles du premier degré

CHAPITRE VII

Premières notions sur les fonctions vectorielles

§ I. — Fonctions implicites

CHAPITRE VIII

Notions sur les fonctions explicites

CHAPITRE IX

Fonctions vectorielles du premier degré

§ I. — Forme de l'équation du premier degré

§ II. — Fonctions linéaires conjuguées

§ III. — Fonctions linéaires ternions

§ IV. — Fonction linéaire inverse

§ V. — Fonctions linéaires répétées

§ VI. — Théorèmes sur les vecteurs du premier degré

CHAPITRE X

Théorie vectorielle du plan

§ I. — Plans fixes

CHAPITRE XI

Théorie vectorielle du plan (suite)

Plans conjugués

CHAPITRE XII

Rapport anharmonique vectoriel

§ I. — Préliminaires

ERRATA

Pages	lignes	*au lieu de*	*lisez*
36	(11)	$\frac{1}{\cos\theta - \sin\theta}$	$\frac{1}{\cos\theta - I\sin\theta}$
50	27		triangle sphérique.
60	3e ligne de la parenthèse	$= -\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$	$= -\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^4}$
70	8	$(ab'c'') = \Delta^2$	$(AB'C'') = \Delta^2$
»	(28) et (33)	**KJ**	**KI**
79	10	k	**K**
»	10	($IB)	(IJK)
80	10 en remontant	k	**K**
84	(5)	remettez les ω_1 et changez KI en JK et K_1I_1 en J_1K_1	
»	dernière ligne	progressions	projections
90	14	(Ii, Ij)	(I_1, I_2)
92	(14)	Δk	Δ K
112	(14)	$\rho =$	$\beta =$
114	24	$\mathbf{T}\gamma\alpha.\beta = -\mathbf{T}\beta.\mathbf{T}\alpha\gamma$	$\mathbf{T}\gamma\alpha.\beta = -\beta.\mathbf{T}\gamma\alpha$
»	25	$\mathbf{T}\gamma\alpha = \mathbf{T}\alpha\gamma$	$\mathbf{T}\gamma\alpha = -\mathbf{T}\alpha\gamma$
127	3		$K = i\frac{\Sigma B\cos\alpha}{G} + j\frac{\Sigma B\cos\beta}{G} + k\frac{\Sigma B\cos\gamma}{G}$

CALCUL VECTORIEL

PREMIÈRE PARTIE

LES PRINCIPES GÉNÉRAUX DU CALCUL VECTORIEL

INTRODUCTION

§ I. — Le calcul vectoriel

1. *Objet du calcul vectoriel*. — L'étude que nous présentons au lecteur a pour objet de réunir en un corps de doctrine les principes du calcul vectoriel, ou de l'unité circulaire, de ramener les règles du calcul des quaternions aux règles ordinaires du calcul arithmétique, et de montrer que le calcul algébrique suffit pour démontrer des propriétés algébriques.

L'étude des ouvrages de Hamilton, Tait, Houel, Vallès, etc., nous ont montré bien des lacunes. Nous ne croyons pas qu'il y ait grande utilité, comme l'avoue Tait lui-même, à transformer les propositions de la Géométrie Euclidienne, prises dans leur état fini de réalité, car il importe peu dans les opérations linéaires que les vecteurs soient réels ou imaginaires, c'est à dire scalars ou ternions, puisque chácun y

entre par sa direction particulière. Les démonstrations relatives aux polygones rectilignes sont les mêmes qu'ils soient considérés comme des vecteurs réels ou imaginaires. Nous verrons en effet, qu'une sommation de vecteurs scalars ne peut donner pour somme vectorielle qu'un vecteur scalar, et une sommation de vecteurs ternions ne peut donner pour somme vectorielle qu'un vecteur ternion. Autrement dit : On ne peut ajouter ensemble que des quantités réelles et des quantités imaginaires séparément.

C'est pourquoi au lieu de chercher à traduire en langage de quaternions les théorèmes de la géométrie et de la mécanique, quand on les considère dans leur état particulier de réalité finie, ce qui ne conduit généralement à aucun aperçu nouveau et pourrait faire douter de l'utilité et de la nécessité de la méthode vectorielle, nous nous sommes attaché, au contraire, à traduire en langage ordinaire de l'algèbre les questions dans lesquelles se présente le symbole $\sqrt{-1}$ de l'unité circulaire.

Comme le dit St-Venant (Etude des Sciences), pour comprendre les œuvres mathématiques de beaucoup d'auteurs, on sait à quel labeur, il faut le plus ordinairement se livrer. Il faut, dit Poncelet, s'identifier avec l'auteur, il faut refaire sous d'autres formes et presque à chaque pas sa découverte. On ne peut signaler en marge une erreur, ni consigner un éclaircissement sans produire un bouleversement complet. Cette condition matérielle est à un haut degré antiscientifique. Les Leibnitz, les Bernoulli, les Euler entendaient les choses autrement. La plupart des ouvrages de Lagrange, de Cauchy, de Poisson, de Laplace, de Fresnel, de Poinsot n'ont point ce défaut, que l'on trouve chez certains illustres auteurs anglais.

Si nous n'avons pas toujours réussi à rester clair, nous avons du moins cherché à employer un langage ordinaire et

à éliminer les raisonnements métaphysiques, qui n'ont pas de liaison nécessaire avec le résultat expérimental.

2. *Objections.* — Plusieurs objections, que nous analysons au cours de cet ouvrage, nous ont été suggérées par l'étude des auteurs du calcul vectoriel. Les principales sont les suivantes :

1° Tout vecteur unité (ternion-unité) n'est autre chose qu'une valeur définie de l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$, et cette opération n'est pas algébrique mais transcendante ou périodique.

2° Les vecteurs coordonnés ne peuvent avoir pour longueur modulaire que l'unité réelle, d'après la loi de l'homogénéité de la nature des grandeurs de même espèce. Autrement dit : le signe fonctionnel $\sqrt{-1}$ n'exprime comme verseur qu'une opération angulaire ou de direction, mais si l'on y associe l'unité réelle, comme module, il exprime un vecteur-unité.

3° Nous établissons que la permutation des termes ne peut avoir lieu, aussi bien pour une addition vectorielle, que pour une addition versorielle, et nous regardons les expressions assez barbares de propriétés associatives, distributives, commutatives, etc., comme au moins inutiles. Car aucun raisonnement métaphysique ou d'induction mentale ne peut nous faire prévoir, ou même deviner quelles seront les propriétés nouvelles d'une fonction élémentaire supérieure, et les règles du calcul ne peuvent avoir d'autre base scientifique que l'expérimentation ou l'induction expérimentale proprement dite.

4° Le calcul vectoriel est un développement du calcul arithmétique ordinaire, et la notion de vecteur est commune aux scalars et aux quaternions, ce qui explique la dénomination de *ternion*, qui répond à celle de vecteur de Hamilton. En effet, une variable implicite peut être vecto-

rielle ou non, et la connaissance de sa nature ne peut résulter que de la discussion sur la nature des coefficients constants, et le verseur étant variable d'une manière continue, aussi bien que le module, elle devient un scalar, pour des valeurs déterminées du verseur, sans cesser d'être vectorielle ou dirigée. A vrai dire, Hamilton et ses successeurs ont traité le calcul des verseurs, la plupart du temps, en les réduisant à des ternions, tandis qu'on doit les considérer comme ayant un verseur angulaire quelconque.

De plus il ne nous paraît pas nécessaire, ni utile, de mettre le multiplicande après le multiplicateur, et nous montrons que l'algorithme de la division vectorielle doit être généralisé. Enfin nous trouvons que la méthode des coniques sphériques est beaucoup plus compliquée que le résultat à démontrer, tandis que la méthode algébrique suffit à tous les cas, sans ambiguité.

5° Les biquaternions ne constituent pas un calcul différant essentiellement du calcul vectoriel ordinaire. La seule différence consiste dans l'indétermination de la valeur de l'unité imaginaire et par suite entraine un sytème correspondant d'identités, et ramène la question à un problème d'analyse indéterminée.

6° Nous établissons la théorie des fonctions linéaires vectorielles d'une manière purement algébrique, et la théorie si obscure de la fonction inverse de Hamilton nous paraît illusoire. L'on est presque effrayé de la somme de travail dépensé à sa construction, pour arriver à un résultat qui se déduit si naturellement de la transformation linéaire, et aussi de la somme de travail à dépenser pour remettre la question au point de vue du langage scientifique ordinaire. Il faut alors remonter aux fonctions inverses des quaterninons de manière que la première question devienne un cas particulier d'une proposition plus générale. Or on sait que la transformation linéaire donne immédiatement la fonction li-

néaire inverse par la méthode bien connue des déterminants.

7° Nous montrons que la dérivée vectorielle se déduit du calcul ordinaire, puisque le quotient de deux quaternions est un nouveau quaternion parfaitement défini.

Si Hamilton, au lieu d'élever un piédestal au milieu de la science mathématique, eût consacré son génie à mettre sa découverte au niveau de la science, il eut sans doute perdu de l'originalité à laquelle paraît avoir beaucoup tenu ce savant, mais sa gloire n'en eût pas été moindre, et le bénéfice de la science en eût été plus considérable.

Beaucoup d'illustres auteurs se laissent entraîner à croire que leur découverte doit rendre inutile les travaux de leurs prédécesseurs. Mais, à moins qu'il ne s'agisse de redresser une erreur universelle dans le monde physique, comme ont fait les Copernic, les Lavoisier, en astronomie et en chimie ; dans la science mathématique, où le contrôle rationnel est plus facile, la marche de la science est essentiellement progressive. Le calcul vectoriel n'altère en rien le calcul algébrique ordinaire, les coordonnées curvilignes et vectorielles ne suppriment pas les coordonnées cartésiennes, et font au contraire ressortir leur caractère fondamental. La géométrie Euclidienne, si elle est devenue insuffisante, n'en est pas moins aussi nécessaire et le corollaire indispensable de la géométrie de l'infini. Généralisation n'est pas destruction.

Assurément le langage peut se modifier beaucoup par l'emploi de termes plus généraux, que l'usage se charge de consacrer, et faire abandonner des termes trop restreints. Mais dire par exemple, que la méthode des quaternions est indépendante d'un emploi quelconque des coordonnées, c'est d'abord un oubli de la nature même de la relativité de la connaissance, et c'est encore un oubli que cette méthode constitue précisément un système de coordonnées. La découverte de Hamilton du calcul algébrique de l'unité imaginaire, ainsi

que celle de l'homographie et de l'anharmonie dans les figures géométriques de Chasles, sont venues préciser la corrélation vectorielle de la sphère et du plan, comme figures fondamentales dans l'espace, mais elles ne suppriment aucun des théorèmes relatifs au plan et à la sphère, et ne font que les généraliser.

3. *Division du sujet.* — L'ouvrage que nous présentons au lecteur comprend trois parties distinctes : La première partie est relative aux principes élémentaires où aux règles du calcul vectoriel.

La seconde partie comprend la théorie des fonctions vectorielles ou l'étude des fonctions de Points, et celle des vecteurs de Points.

Enfin la troisième partie concerne les applications du calcul vectoriel à la géométrie, à la cinématique et à la physique moléculaire.

Après avoir exposé dans le premier chapitre, l'origine et la nature du calcul vectoriel, nous donnons dans le second chapitre des notions générales sur les vecteurs ; et les définitions que nous présentons résultent des théorèmes sur le calcul des vecteurs. Nous définissons d'une manière générale l'addition vectorielle, et l'addition versorielle, et nous pensons pouvoir faire disparaitre bien des obscurités dans le calcul des quaternions et permettre à des esprits plus aptes aux découvertes mathématiques de développer avec plus de sûreté les règles du calcul des quantités périodiques. Nous ajoutons quelques notions, d'ailleurs bien connues sur l'exponentielle linéaire qui n'est autre chose que le type d'une quantité circulaire ou quaternion.

Nous abordons dans le troisième chapitre les règles algébriques du calcul de l'unité imaginaire et nous démontrons d'une manière purement arithmétique les propriétés

des vecteurs quadrants, établies par Hamilton d'une manière intuitive.

Nous complétons les formules par quelques notions sur les composantes obliques, qui trouvent leur application dans le calcul d'une fonction linéaire, considérée d'une manière générale.

Dans le chapitre IV nous montrons l'analogie de l'équation versorielle binôme, avec l'équation binôme ordinaire et sans doute ces analogies pourront être définies avec plus de détail. Nous regrettons que le temps et les capacités ne nous permettent pas de développer ce point où il faut aborder le calcul vectoriel proprement dit.

Nous reprenons ensuite le produit des vecteurs accompagnés de leurs modules, parce que la forme additive ou vectorielle des quaternions donne au calcul algébrique une toute autre forme.

Nous reprenons la sommation générale des vecteurs et enfin nous croyons devoir, avant d'aborder les propriétés générales des fonctions vectorielles donner la théorie des équations vectorielles du premier dégré.

CHAPITRE PREMIER

ORIGINE ET NATURE DU CALCUL VECTORIEL

§ I. De l'imaginaire en Arithmétique

4. *Opérations fonctionnelles élémentaires.* — Toute opération que l'on exécute sur un nombre quelconque constitue une fonction de ce nombre. Nous pouvons distinguer les opérations ou fonctions *élémentaires*, en désignant ainsi celles qui ne peuvent se réduire à une autre plus simple sans disparaître.

L'opération primitive et unique du nombre est la répétition ou l'addition. Toutes les opérations dont se servent les mathématiciens sont dérivées de celle-là. Comme dans les répétitions et les combinaisons complexes qui peuvent aller à l'infini, il serait fastidieux et impraticable de procéder par simple répétition, le *calcul* a pour but de remédier à la faiblesse et à la limitation de notre compréhension.

Quand on répète une opération sur un nombre quelconque, on obtient une nouvelle fonction élémentaire qui possède de nouvelles propriétés. Ainsi, faire la somme d'une somme donne un *produit*, et l'on nomme *coefficient* le nombre qui exprime combien de fois on répète l'opération. De même le produit d'un produit donne une *puissance*, et l'on nomme *exposant* le nombre qui indique combien de fois on répète l'opération. Cette nouvelle fonction possède de nouvelles propriétés, en même temps qu'elle emploie les opérations

inférieures dont elle est composée, c'est ce qu'on appelle le principe de la permanence des règles du calcul, formulé par Hanckel.

5. *Classification des opérations fonctionnelles.* — Après les opérations précédentes, qui forment une première classe, qu'on appelle plus spécialement opérations algébriques, vient une seconde classe de fonctions élémentaires, que nous pouvons comprendre sous le nom de fonctions ou opérations *circulaires*. Elle comprend la fonction exponentielle et son inverse la fonction logarithme, les fonctions trigonométriques et angulaires, enfin les fonctions vectorielles ou les quaternions. Cette classe a pour caractère spécifique d'être simplement périodique, la période étant $2\pi\sqrt{-1}$, et a précisément pour valeur numérique la période circulaire.

Puis viennent ensuite les fonctions doublement périodiques qui forment une troisième classe d'opérations élémentaires, bien plus variée, qu'on peut désigner sous le nom d'opérations ou fonctions *elliptiques*, et ainsi de suite.

6. *De l'Algorithme des opérations.* — Le nombre des opérations élémentaires ou fonctionnelles que l'on peut exécuter sur le nombre est indéfini et illimité, tandis que celui des algorithmes ou signes d'opération est forcément limité dans la pratique. D'ailleurs la science ne possède pas toujours de notation suffisante pour exprimer une répétition fonctionnelle. On convient alors par un avertissement express d'exprimer l'opération d'une manière algébrique. C'est ainsi que l'on écrit θ^2 pour $\theta\,(\theta.)$, θ étant un signe fonctionnel ou d'opération exécutée sur une quantité qui reste implicite, et de même on écrit θ^3 pour $\theta\,(\theta^2)$, etc. Alors la fonction inverse peut s'écrire θ^{-1} ; mais il faut alors prendre garde de confondre la fonction inverse ainsi écrite conventionnellement, et qui, ayant généralement une forme toute différente, demande un algorithme différent, à moins qu'elle

ne soit linéaire, avec la fonction réciproque $\frac{1}{\theta}$. C'est ainsi que certains auteurs anglais expriment par $\overset{-1}{\tan g\,\alpha}$ la fonction inverse arctg α, bien que, considérée algébriquement $\overset{-1}{\tan g\,\alpha}$ soit la fonction réciproque cotg α. Ce nest donc là qu'une convention transitoire, pouvant donner lieu à des obscurités.

Par exemple la fonction sin (sin x) donne une nouvelle fonction transcendente, pour laquelle la science ne possède pas d'algorithme bien défini, et qui est un cas particulier de la forme générale $H = e^{a^{e^{b^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$, qu'on pourrait appeler multicirculaire. Il importe de ne pas confondre cette opération avec l'opération produit $\sin^2 x = \sin x, \sin x$, que l'on écrit pour $(\sin x)^2$. en supprimant la parenthèse pour abréger. Cette opération est encore distincte de celle-ci $\sin (x^2)$ faite sur la variable angulaire.

Soit encore comme exemple, l'opération vectorielle

$$\nabla. = i \frac{d.}{dx} + j \frac{d.}{dy} + k \frac{d.}{dz},$$

le nombre qui subit l'opération restant implicite. Cette opération répétée fonctionnellement donne une nouvelle fonction quaternion, qui possède de nouvelles propriétés, et dont la partie scalar

$$S.\ \nabla_2. = - \left(\frac{d^2.}{dx} + \frac{d^2.}{dy^2} + \frac{d^2.}{dz^2}\right)$$

est le paramètre scalar différentiel du second ordre, ou simplement le paramètre scalar second. Si au contraire, on répète la fonction ∇. algébriquement par produit on obtient

$$(\nabla.)^2 = - \left\{ \left(\frac{d.}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d.}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d.}{dz}\right)^2 \right\}$$

qui est le carré du module de la même fonction ∇. ou paramètre ternion premier.

Nous voyons qu'une opération quelconque est indépendante du nombre ou de la quantité sur laquelle on opère, tant que celle-ci reste implicite, ce qui confirme le principe de Hanckel. Il n'en serait plus de même, si l'on développait les opérations indiquées par une quantité explicite ; l'on serait conduit à écrire une somme de termes pouvant contenir des opérations différentes les unes des autres, mais le principe restera le même pour toute quantité implicite, jusqu'à ce que l'on retombe sur l'unité (dont la valeur reste elle-même implicite).

On se trouve conduit dans le calcul vectoriel ou des quaternions à de nouvelles fonctions, qui présentent des propriétés nouvelles qui viennent modifier profondément les théorèmes que l'on est habitué à considérer sur les nombres réels. On a proposé d'expliquer ces nouvelles propriétés par la généralisation de propriétés dites *associatives*, *distributives*, *commutatives*, *etc.*, parce que les théorèmes de la sommation et de la permutation des termes présentent de nouvelles règles. Nous ferons seulement remarquer que tous les raisonnements, que l'on peut établir par une induction métaphysique ne peuvent en rien nous faire prévoir quelles seront les nouvelles propriétés d'une fonction supérieure élémentaire. Ces raisonnements ne peuvent avoir d'autre base scientifique que l'induction expérimentale proprement dite. Du reste, tous les mathématiciens, bien que le calcul de l'unité imaginaire ne fut pas encore bien connu, ont crû devoir démontrer la légitimité de la permutation des termes dans les opérations sur les nombres réels. Il n'est donc pas étonnant qu'il se présente des cas où cette permutation ne peut plus avoir lieu sans changer la valeur du résultat, comme on le voit déjà pour les puissances, opération dans laquelle l'échange de la base et de l'exposant est rarement symétrique.

7. *Extension de l'idée de nombre.* — L'arithmétique ne se borne pas au nombre supposé entier ; mais elle s'applique à toute quantité, c'est-à-dire, à toute grandeur susceptible d'une mesure numérique. Une quantité étant donnée, le nombre quelconque qui la mesure étant toujours un symbole et pouvant rester implicite, le nombre, à proprement parler, n'est ni entier, ni fractionnaire, ni incommensurable, circulaire, etc. : mais il y a des nombres entiers, des nombres fractionnaires, des nombres incommensurables, ou irrationnels, des nombres circulaires, quaternions, des nombres elleptiques, etc. ; dont l'étude forme autant de branches distinctes de l'arithmétique.

Pour comprendre comment l'on est conduit à cette extension de l'idée de nombre, il faut et il suffit de considérer les opérations inverses sur le nombre.

D'abord, l'opération de la soustraction conduit à la notion de nombres négatifs et à l'opposition des signes de l'unité réelle $\pm$, conséquence de la dualité relative de la connaissance.

L'interprétation de cette opposition se déduit facilement du principe de l'opposition des contraires du relatif, suivant les trois lois objectives de la pensée ; savoir : suivant la durée antérieure ou postérieure à l'origine du *temps* ; suivant la direction par rapport à l'origine de l'*espace* ; et enfin suivant la qualité d'être plus ou moins relativement à la notion de *substance*, et c'est tout. On peut voir, combien sont illusoires les discussions sur les nombres isolés, qui portent sur les mots et non sur les choses.

En second lieu, l'opération de la division, inverse de l'opération produit, conduit de même à une extension de l'idée de nombre plus étendue que celle de pluralité ; savoir : celle de *rapport* ou de mesure, que l'on appelle fraction. Le rapport de deux nombres entiers constitue en fait une notion nou-

velle du nombre, et la théorie des fractions constitue une branche usuelle de l'arithmétique.

En troisième lieu, l'opération de l'extraction des racines, inverse de l'opération puissance, conduit de même à une nouvelle extension de l'idée de nombre, celle de nombre incommensurable, irrationnel, ou sériaire. Une série de termes peut ne pas être incommensurable, auquel cas le nombre de ses termes est fini, et elle exprime un nombre rationnel. Mais un nombre incommensurable s'exprime d'une infinité de manières par une série dont le nombre des termes est infini. De là une nouvelle branche de l'arithmétique ou la théorie des séries.

De même encore l'opération logarithme, inverse de la fonction exponentielle, conduit à une nouvelle extension de l'idée de nombre ; savoir : celle de nombres circulaires, ou quaternions. On a appelé calcul vectoriel l'ensemble des règles et des théories, qui régissent ces nombres, et son importance en arithmétique ne le cède en rien aux théories précédentes.

« Ainsi que le dit Poinsot, la théorie des quantités angulaires n'appartient pas seulement à la géométrie, comme on pourrait le croire d'après l'origine des fonctions trigonométriques. Cette théorie est une partie essentielle de l'analyse mathématique. La division des logarithmes en parties aliquotes répond à l'extraction de la racine d'une quantité réelle, de même la division de l'angle en parties aliquotes de l'unité répond à l'extraction de la racine d'une quantité imaginaire. Or les quantités réelles et imaginaires se mêlent à tous nos calculs et la science de l'algèbre exige à la fois la considération des angles et des logarithmes. »

8. *Le calcul vectoriel.* — L'expression des arcs en logarithmes imaginaires remonte à Jean Bernoulli en 1712 (Lagrange, Œuvres, T. X). Cette découverte est restée

d'abord stérile, et il a fallu qu'elle fut connue par d'autres voies, telles que la conséquence du développement en série de la formule d'Euler

$$e^{\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

ainsi que celle du développement de la formule de Moivre

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + \sqrt{-1}\sin m\alpha,$$

et enfin par la voie géométrique, dans la comparaison des sections hyperboliques et circulaires, qu'Euler a rendu élémentaire et familière aux géomètres.

Mais jusqu'à la découverte, par Hamilton, du calcul algébrique de l'unité imaginaire, l'on était assujetti à ne pas sortir du même plan. On sait aujourd'hui que l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$, aussi bien que l'unité réelle, a une infinité de valeurs distinctes dont on connaît l'expression algébrique. La multiplicité des valeurs de l'unité réelle ou imaginaire est en fait une nouvelle extension de l'idée de nombre, qui modifie profondément la notion que nous en avions jusqu'ici.

La théorie du calcul vectoriel ou des quaternions, indépendemment d'une notation ou d'un algorithme plus ou moins perfectionné est une partie intégrante du calcul algébrique ou de l'arithmétique. Tout son mérite repose sur les propriétés arithmétiques de l'unité circulaire, ou des verseurs-quadrants, et sur la multiplicité sphérique des valeurs de cette unité, suivant des règles bien déterminées. Il n'en est pas moins vrai que le calcul vectoriel est encore loin d'être élémentaire et rendu familier aux géomètres.

Plusieurs théories mathématiques éparses, qui en réalité appartiennent au calcul vectoriel comme cas particulier, ont été étudiées antérieurement et indépandemment de la notion explicite de l'unité vectorielle. Telle est la théorie des logarithmes imaginaires, et de la fonction exponentielle linéaire ; ainsi que la théorie des équations binômes, qui est un cas particulier de l'équation binôme versorielle.

Le calcul des quantités vectorielles à plan verseur fixe a été étudié depuis longtemps par Cauchy, Briot, etc. et répond au cas où l'on considère seulement un grand cercle de la sphère-unité, c'est-à-dire, une direction fixe de l'unité imaginaire, de sorte que la véritable difficulté du calcul vectoriel est due précisément aux valeurs multiples de l'unité réelle ou imaginaire. De là viennent des règles entièrement différentes de celles du calcul numérique réel et qu'une étude attentive peut seule nous apprendre à connaître.

Nous ajouterons que les dualismes continuels qui se remarquent dans les phénomènes naturels, comme dans les principes mêmes de la connaissance rationnelle, conduisent à considérer la dualité des contraires comme une loi de la nature des choses et de la relativité de la connaissance. Nous retrouvons dans la corrélation de l'unité réelle et imaginaire cette dualité jusque dans le nombre, c'est-à-dire, à la base des lois objectives de la pensée. On reconnait aujourd'hui que l'infini mathématique constitue un continu des grandeurs réelles et imaginaires, et qu'au fond le principe de la continuité ne diffère pas de celui de la dualité.

§ II. — De l'imaginaire en Géométrie

9. *Les éléments géométriques imaginaires.* — On appelle *imaginaire* en géométrie tout élément fonctionnel, tel que ligne, plan, angle, courbe, surface, etc. qui, de réel qu'il était dans une figure, devient *inconstructible* dans cette figure, mais devient au contraire réel et constructible dans une figure corrélative de la première. Réciproquement les parties imaginaires de cette seconde figure deviennent réelles et constructibles dans la première, qui est ainsi conjuguée de la seconde.

De sorte que si l'on considère l'ensemble de ces deux figures conjuguées par la dualité réelle et imaginaire ou vectorielle, en tenant compte de la continuité de l'infini, on pourra exprimer cette construction par une seule expression analytique vectorielle.

Ainsi, étant donnée une figure dans laquelle se présentent des parties imaginaires, on peut toujours en concevoir et en construire une autre dans laquelle les parties réelles répondent aux parties imaginaires de la première et réciproquement.

« Donc les parties imaginaires d'une figure considérée comme réelle n'appartiennent pas à cette figure, et les résultats que l'on en déduirait, comme tels, seraient entachés d'erreurs et n'auraient aucun sens. » (Chasles, Aperçu hist. p. 369.)

Ce principe de la corrélation des figures réelles et imaginaires a été employé depuis longtemps par les Géomètres, au moins d'une manière implicite, dans la corrélation des sections circulaires et hyperboliques, et la corrélation des exponentielles et des fonctions trigonométriques, de telle sorte, que les solutions imaginaires des premières sont les solutions réelles des secondes, et réciproquement. Carnot dans son traité de la corrélation des figures, et dans sa géométrie de position, Lambert dans son étude comparée du cercle et de l'hyperbole équilatère, qui est la figure corrélative du cercle, ont employé ce principe.

L'introduction des imaginaires en géométrie a présenté d'abord de grandes difficultés, qui sont loin d'être toutes résolues. On ne savait pas comment définir ces quantités, ni comment les introduire dans le raisonnement. Il arrive, en effet, que le principe de la démonstration prend une telle extension, quand on considère l'ensemble des parties réelles et imaginaires de figures conjuguées, que la démonstration relative à une seule de ces parties n'est plus qu'un cas par-

ticulier d'un théorème plus général où la nature vectorielle des éléments reste implicite. C'est ainsi, que la théorie des pôles et des polaires réciproques, ainsi que celle des sécantes, quand on considère l'ensemble des parties réelles et imaginaires, permet de traiter les courbes et les surfaces conjuguées d'un certain ordre, d'une manière uniforme et symétrique, comme on le voit de suite pour les surfaces du second ordre.

Les éléments imaginaires sont d'ailleurs toujours la conséquence de la présence du signe $\sqrt{-1}$ de l'unité imaginaire circulaire, dans les opérations analytiques, et correspondent à une double solution d'une relation à forme réelle d'un degré pair. Chasles a introduit directement de cette manière la considération d'éléments linéaires imaginaires, en partant de la division homographique. Les points doubles ou les rayons doubles d'un faisceau homographique ayant même centre, étant donnés par une relation du second degré de la forme

$$\overline{\mathrm{Am}}^2 + (\lambda + \mu)\,\overline{\mathrm{Am}} + \nu = 0$$

où λ, μ, ν, sont des constantes numériques, de rapports anharmoniques réels, que l'on détermine au moyen de trois couples de points correspondants ; alors ces points, ou ces rayons doubles seront réels ou imaginaires avec la nature des deux racines conjuguées.

10. *Notions historiques*. — Si nous considérons les différentes phases par lesquelles est passée l'interprétation géométrique de l'unité imaginaire, nous voyons que depuis deux siècles à peine elle fait l'objet des spéculations des mathématiciens.

Wallis vers la fin du dix-huitième siècle proposa de représenter les racines impossibles du second degré, en portant les parties imaginaires en dehors et sur la perpendiculaire à

la direction suivant laquelle on porte la partie réelle. Cette construction revient à donner à l'opération $\sqrt{-1}$ la signification d'une rotation d'un angle de 90°. Mais il ne fit pas la remarque que cette perpendiculaire peut être portée arbitrairement dans tout plan perpendiculaire à la direction réelle. De plus, nous verrons que ce n'est pas dans le plan du tableau qu'elle se trouve comme l'ont pensé la plupart des auteurs après Wallis, mais qu'elle est perpendiculaire au plan des quantités scalars ou réelles et dont elle assigne la direction, conformément au principe de la perpendicularité des quantités réelles et imaginaires conjuguées. Nous ne voyons nulle part que Poncelet ait vu qu'au moment ou un élément passant par zéro ou par l'infini, devenait imaginaire, il subissait une rotation d'un quadrant, de sorte que deux figures planes conjuguées sont nécessairement dans des plans perpendiculaires l'un sur l'autre.

Chasles a fort bien vu cette perpendicularité des systèmes réels et imaginaires, à partir du zéro conjugué harmonique de l'infini ; cependant nous ne voyons pas qu'il ait exprimé explicitement la perpendicularité des plans de deux coniques conjuguées vectoriellement. Quand on opère comme Poncelet on a en fait une courbe du 4ᵉ ordre dont les branches réelles ont un double point de contact à distance finie et à distance infinie.

Le premier essai de représentation des quantités imaginaires serait dû à Khün en 1751 (Voir Houel, Théorie des quantités complexes en 1872). C'est à ce dernier auteur que nous empruntons ces premières notions historiques dans ce qu'elles ont d'essentiel. Kühn forme quatre carrés sur les axes

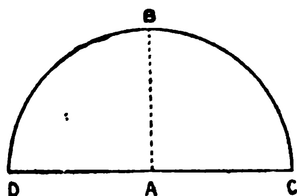
(1)

β	α
γ	δ

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt{\alpha} = \sqrt{(+\,a)\,(+\,a)} = a \\ \sqrt{\beta} = \sqrt{(+\,a)\,(-\,a)} = \sqrt{-\,a^2} \\ \sqrt{\gamma} = \sqrt{(-\,a)\,(-\,a)} = -\,a \\ \sqrt{\delta} = \sqrt{(-\,a)\,(+\,a)} = -\,\sqrt{-a^2} \end{cases}$$

coordonnés, et il pose les égalités (2). Mais il n'indique pas lequel des cotés il faut prendre pour représenter l'unité imaginaire et ne fait pas intervenir l'idée de direction et de périodicité.

Après la tentative de Kühn, on trouve le mémoire de l'abbé Buée (Philosophical Magazine 1806), sur les quantités imaginaires. Buée formula pour la première fois leur représentation par des longeurs dirigées perpendiculaires à la direction réelle. Il parvient à ce résultat par deux raisonnements différents. Le premier repose sur la construction d'une moyenne proportionnelle entre les deux cotés $AC = +1$ et $AD = -1$. La perpenticulaire AB est moyenne proportionnelle entre les deux segments adjacents et l'on a



$$AB = \sqrt{(+1)(-1)} = \sqrt{-1}$$

L'autre raisonnement est celui de Kühn sur le signe des quatre carrés que l'on peut considérer conmme ayant les quatre valeurs $(+1, -1, +1, -1)$ ou comme les carrés des quatre quantités.

$$(+1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1})$$

qui représentent les cotés avec leurs lignes dans les quatre positions rectangulaires.

Dans la même année Argand établit d'abord en suivant la première méthode de Buée, la représentation du symbole $\sqrt{-1}$ par la longueur unité portée sur une direction perpendiculaire à celle des directions réelles, comme l'avait fait Wallis. Il généralise ensuite cette conception en introduisant un symbole unique pour exprimer un vecteur. Il définit les opérations de l'addition et de la multiplication,

et conclut à la décomposition d'un vecteur en deux composantes rectangulaires, l'une réelle, l'autre imaginaire, affectée du signe $\sqrt{-1}$. C'est la première expression donnée d'un quaternion et Argand doit être considéré comme le premier inventeur du calcul vectoriel. Dans le siècle actuel, Warren, Moivre, Cauchy, etc. ont étendu à d'autres fonctions la découverte d'Argand. On reconnait que le facteur $\sqrt{-1}$ est un opérateur qui exécute une rotation de 90° d'un vecteur dans un plan vecteur, et cette opération est périodique ; la période comprenant les phases

$$\{ (\sqrt{-1}), -1, (-\sqrt{-1}), +1 \}$$

de telle sorte que chacun des termes de cette suite se déduit du précédent par la multiplication par $\sqrt{-1}$, et la période est précisement la période circulaire 2π. De plus à l'aide de la formule de Moivre exprimée par la relation

$$(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^{m} = \cos m\alpha \sqrt{-1} \sin m\alpha$$

on reconnait que le facteur angulaire d'Euler

$$\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha = e^{\alpha \sqrt{-1}}$$

est un opérateur qui effectue une rotation d'un vecteur d'un angle α dans un plan, et que par suite $\sqrt{-1}$ est la valeur particulière de cette quantité angulaire répondant à la valeur principale $\alpha = \frac{\pi}{2}$ de l'argument, de sorte que l'on a les expressions,

$$\left(\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}, -1 = e^{\pi\sqrt{-1}}, -\sqrt{-1} = e^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}}, +1 = e^{2\pi\sqrt{-1}}\right)$$

formules dues à Euler, qui montrent la périodicité de la

fonction axponentielle linéaire, et que de plus, l'unité imaginaire et l'unité réelle ont une infinité de valeurs périodiques circulaires.

11. *Découverte de Hamilton*. — Mais jusqu'à la découverte par Hamilton des règles du calcul algébrique de l'unité imaginaire, on était assujetti à ne pas sortir d'un même plan. Une tentative avait été faite par Servois en 1813. En cherchant aussi à étendre à l'espace ce que l'expression $\sqrt{-1}$ représente relativement à un plan, Servois se trouve conduit à écrire cette expression sous la forme.

$$p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma$$

en désignant par (α, β, γ) les angles que forme la direction du rayon de la sphère-unité avec trois axes rectangulaires, et il s'assure que les quantités p, q, r ne peuvent pas être réelles ; mais il ne peut trouver de réponse à leur forme. Or ces quantités sont précisément les vecteurs-quadrants (i. j. k) de Hamilton.

Vallès, il y a une vingtaine d'années (Des formes imaginaires en algèbre), crut trouver dans le facteur exponentiel $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, le moyen de sortir du plan des (x y), mais, outre que sa tentative est vaine puisque le facteur $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ fait tourner le vecteur dans le plan des (z y) seulement, il n'a pas vu par une erreur inconcevable que le symbole $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ est une quantité réelle, comme l'avait montré Euler depuis longtemps. On lui doit cependant de sérieuses réflexions sur la nature de l'unité imaginaire, et surtout sur la construction vectorielle des équations.

12. *Multiplicité des valeurs de l'unité*. — On sait

aujourd'hui que l'opération $\sqrt{-1}$ de l'unité imaginaire, que nous désignerons par I, a une infinité de valeurs distinctes comprises dans la formule donnée par Hamilton

$$I = i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma$$

où i, j, k sont trois valeurs coordonnées du même symbole $\sqrt{-1}$ choisies arbitrairement, mais cependant assujetties à être rectangulaires entre elles ; c'est-à-dire, que l'on a la relation algébrique réelle

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

qui exprime également que l'unité réelle a une infinité de valeurs distinctes.

Comme le dit Hamilton, toutes les directions de l'espace peuvent devenir imaginaires. Mais il faut se garder de les confondre avec les directions de l'unité réelle, qui sont aussi en nombre infini. Il faut de plus observer qu'une quantité n'est imaginaire que relativement à une autre quantité réelle qui lui est conjugée et réciproquement. Enfin qu'une même quantité ne peut être simultanément réelle et imaginaire. Donc « deux directions, l'une réelle, l'autre imaginaire et coïncidantes sont essentiellement distinctes géométriquement et analytiquement ; autrement dit, elles n'appartiennent pas à la même figure ou à la même quantité (n° 9) ». De sorte que l'espace indéfini admet indifférement les grandeurs réelles et les grandeurs imaginaires.

Le caractère de multiplicité des valeurs de l'unité réelle ou imaginaire est facile à assigner. La multiplicité des valeurs de l'unité réelle est due au *parallélisme* de toutes les directions perpendiculaires à un plan quelconque. La multiplicité des valeurs de l'unité imaginaire est *angulaire*, et est relative à tous les azimuts distincts autour d'un même axe et généralement autour d'un axe de direction quelconque. L'on voit d'ailleurs que la droite de l'infini sert de passage

de l'une à l'autre direction réelle et imaginaire conjuguée et établit leur continuité vectorielle.

Tout vecteur-unité I n'est donc pas autre chose qu'une valeur définie de l'unité imaginaire arbitraire $\sqrt{-1}$, et ce dernier symbole n'est plus une opération fontionnelle algébrique, mais une opération transcendente, c'est-à-dire périodique. Le signe $\sqrt{-1}$ n'exprime comme verseur quadrant qu'une opération angulaire ou de direction ; mais lorsqu'on y associe comme facteur de mesure l'unité réelle ou modulaire, il devient un vecteur, ou *ternion-unité*. Cela résulte de ce que le nombre ou la quantité qui subit l'opération fonctionnelle, indiquée par l'algorithme correspondant peut toujours être regardé comme implicite (§ I, n° 7). Ainsi le signe $\sqrt{-1}$, considéré par Hamilton comme algébrique, exprime une indétermination de l'unité imaginaire, ou du plan verseur d'un quaternion.

§ III. — De l'imaginaire en Mécanique

En mécanique le principe de la dualité des contraires s'y montre continuellement, et l'on reconnaît que cette dualité a pour base la correlation de l'unité réelle et imaginaire conjuguée, ou qu'elle est *vectorielle*. Ce principe permet ainsi l'introduction directe de l'imaginaire en mécanique, tentative qui n'avait pas encore été faite d'une manière synthétique. Pour le montrer, nous sommes obligés de présenter quelques définitions de principes cosmologiques ou de philosophie naturelle, que nous développons dans un ouvrage séparé.

13. *La masse*. — De même que le nombre et la figure,

la masse est la condition de toute représentation objective. La matière des corps n'est pas une chose que nous puissions saisir dans ses éléments primitifs. Nous ne pouvons connaître que des rapports de masse. La notion scientifique de masse pesante résulte des deux lois fondamentales du mouvement ; savoir : l'inertie galiléenne, et la sommation vectorielle des forces motrices, lois qui sont elles-mêmes la conséquence de la constance du mouvement de transport réel de masse. Mais nous devons distinguer soigneusement une masse d'avec sa pesanteur, qui est son potentiel, comme nous distinguons une masse thermique d'avec sa température.

De même que l'opération primitive du nombre est la répétition, ou la sommation, de même que l'opération primitive de la figure est la direction ou l'angle, de même enfin l'opération primitive de la masse est le mouvement, ou la seule manière de relier une masse à une autre, et la science de la masse est la science du mouvement ou la mécanique.

La masse s'exprime par un coefficient numérique, qui définit la matière comme capable d'un espace fini dans un temps fini, et par suite, comme le nombre, doit être considérée vectoriellement comme ayant deux modes d'existence physiques et de représentation géométrique, l'un réel, l'autre imaginaire, qui constituent respectivement la masse pondérable et la masse impondérable. Nous voyons, en effet, qu'une masse de chaleur, ou d'électricité, constitue comme la masse chimique une résultante d'action mutuelle de masse, mais dont les lois d'inertie et de mesure de force ne sont pas évidemment les mêmes que celles d'une masse pesante ; c'est en effet une masse imaginaire relativement à une masse pesante considérée comme réelle, dont l'inertie s'appelle conduction, et qui mesure un flux de force tout aussi réel comme transport que celui de masse pesante. Nous observerons qu'une masse soit cosmique, soit éthérée, n'est

pas pesante, chaude, magnétique, radiante, par elle-même, mais ne le devient que par l'action mutuelle des masses qui lui sont conjuguées mécaniquement.

La mesure de la masse s'appelle force, et réciproquement la force mécanique est mesurée par la masse. En effet, une masse ne peut-être conçue que comme résultante en un lieu donné d'action mutuelle d'autres masses de même unité, ou si l'on veut comme résultante d'un champ de force dans lequel elle forme un point critique ou de discontinuité. Réciproquement un champ de force ne peut être conçu que comme le résultat d'une distribution de masse, donnant lieu à un flux de force, c'est-à-dire, à une action mutuelle, ce qui nous ramène au point de départ. Or, cette synthèse cosmologique constitue le phénomène du mouvement.

Définie comme *quantité* de matière, la masse a la signification de *Densité*, ou d'une fonction de Point Scalar, définissant un état de la matière à chaque instant par son paramètre, et en chaque lieu par ses coordonnées.

14. *Le mouvement.* — Le mouvement, comme tout phénomène, est un relatif, ou un conditionné de la connaissance. Le mode de communication ou de transmission du mouvement est encore une synthèse de la dualité vectorielle. On distingue, en effet, dans le mouvement deux modes antinomiques, le contact et le transport, qui répondent aux deux modes d'action de la force : l'action immanente ou la tension, et l'action émanente ou l'attraction apparente. L'on voit encore ici les philosophes de la nature défendre exclusivement l'un ou l'autre de ces modes, sans s'apercevoir qu'ils sont liés par une synthèse indissoluble de la dualité phénoménale.

Quand on parle du mouvement on entend le transport réel de masse douée d'inertie galiléenne. Mais puisque l'on doit considérer la masse mesurée par le nombre, sous le

double rapport du réel et de l'imaginaire, le transport ou flux de force est un mouvement tout aussi réel d'une masse, qui n'a pas d'inertie réelle, et qui se traduit par un phénomène tout aussi réel également, qu'on appelle tension. Le transport et la tension de masse forment donc une synthèse vectorielle du mouvement.

La même observation est applicable à la nature géométrique du mouvement de masse, où la vitesse est assez évidemment un vecteur. En fait, tout déplacement élémentaire se ramène à un déplacement scalar, accompagné d'une rotation qui définit le ternion conjugué. D'ailleurs, il y a réciprocité, car toute rotation élémentaire se ramène elle-même à une suite de déplacements rectilignes ou tangentiels, déterminant un plan verseur, et par suite un axe ternion, et tout déplacement rectiligne se ramène à une rotation autour d'un axe instantané qui détermine un vecteur-unité. Les deux mouvements sont donc corrélatifs de la synthèse vectorielle de l'unité réelle et imaginaire.

Le contact ou choc est le phénomène de la transformation, au moyen de l'organisme de la masse, d'un mouvement de transport réel de masse, en un mouvement de transport réel de force, mais devenu imaginaire relativement au premier. Ce phénomène, qui nous paraît un changement brusque de vitesse, est cependant une transformation mécanique qui se poursuit dans le même sens ; le verseur de la vitesse subissant une variation intégrale d'un quadrant pendant la période d'impulsion, puis une seconde variation intégrale pendant la période d'expulsion, et donne par suite le même verseur, mais négatif. Il en résulte que nous aurons à distinguer divers modes d'énergie de transport de masse, et divers modes de tension de masses, d'où l'on verra sortir directement les diverses énergies de la nature.

15. *La force.* — La force mécanique ou simplement la

force a ordinairement le sens de force *motrice*. Elle est alors une pure définition de mouvement et n'est autre chose que l'accélération ou la dérivée de la quantité du mouvement par rapport au temps. Or, la vitesse étant un vecteur, sa variation porte à la fois sur le module et sur le verseur ; de là vient que la force motrice de transport réel de masse est mesurée par la dérivée du module de la vitesse, quelle que soit la fonction verseur ; tandis que la force de tension est là dérivée de la fonction verseur par rapport au temps, quelque soit le module de la vitesse. C'est pourquoi la force motrice pesante se mesure par l'accélération de Newton, et la tension dans le choc par la quantité de mouvement de Descartes.

Si donc nous voulons définir la force mécanique comme principe cosmologique, nous devons la prendre dans sa signification générale de vecteur, et nous dirons que « la force est la mesure d'un transport ou d'une tention de masse ». En effet, l'effet qui mesure la force est le mouvement et ordinairement une force vive de masse, mais la force se mesure tout aussi fréquemment par une tension ou poids, sans qu'il y ait mouvement réel ou de transport.

Cette distinction entre la force motrice de Newton et la quantité de mouvement de Descartes n'est pas toujours bien nette chez les plus illustres géomètres, et nous venons d'en voir la raison. Il suffit pour s'en convaincre de lire attentitivement la démonstration que donne Laplace (M. Cel. 41) du second principe fondamental de la mesure du mouvement, ainsi que la démonstration de Poisson (Traité de M. nº 350) du principe de D'Alembert. En fait tous ces auteurs ont bien soin, lorsqu'il s'agit d'un mouvement de transport de masse inerte, d'employer l'accélération de Newton, et quand il s'agit de mesurer le mouvement disparu ou apparu dans le phénomène du choc, d'employer la quantité du mouvement de Descartes ; mais jusqu'à présent sans mention vectorielle.

Nous aurons occasion de montrer que le principe de D'Alembert, bien que général dans son expression primitive, par l'auteur, ne l'est plus dans son expression analytique déduit du principe des vitesses virtuelles par Lagrange. Il est, en fait, relatif seulement à l'équilibre du travail scalar, ou du transport tangentiel de masse pesante et ne concerne pas les actions de contact, qu'il consiste précisément à éliminer. Ce n'est que par un artifice de calcul, que l'on peut continuer à en faire usage dans certains cas d'actions de contact, où l'on suppose la force vive *réversible*.

L'on peut dire que c'est surtout en mécanique que l'application du calcul vectoriel est le plus net et le plus utile. De brillantes applications en ont été faites par Tait, Thomson, Maxwell, à la physique mathématique. Elles sont liées au développement du calcul vectoriel lui-même.

En statique, un ternion ou un vecteur imaginaire de force n'est autre chose que la direction de l'axe d'un couple de Poinsot, qui exprime par son moment le module du couple. Poinsot a démontré sans employer explicitement la composition vectorielle, que le transport d'un vecteur de force motrice, parallèlement à lui-même, engendre nécessairement un couple et par suite un vecteur imaginaire, qui, réunis vectoriellement aux vecteurs Scalars, donnent des vecteurs quaternions de force. En Cinématique, on peut constater directement que l'état statique ou d'équilibre Cinétique exprime un état réel de tension de masse. Cet état constitue dans l'espace limité ou indéfini un champ de force, déterminé analytiquement par une fonction de point scalar, ou surface potentielle conjuguée des vecteurs de force. L'état Cinétique, ou de mouvement de transport de masse, engendre un effet physique, qui modifie à chaque instant le champ de force. Enfin le principe de la composition de la force, ramène le principe de la statique à cette proposition unique. « Un corps ou un système de corps est en équilibre, quand

la somme des forces qui l'actionnent est nulle ». La question consiste donc à définir en quoi consiste une sommation de vecteurs.

16. *La polarisation.* — L'état de polarisation bipolaire d'un champ de force, ou la formation d'un champ magnétique est encore exprimée par un quaternion. Un élément magnétique détermine la polarisation d'un champ de force, qu'on appelle *induction*, et réciproquement un champ de force magnétique détermine la formation d'éléments magnétiques qu'on appelle *aimantation*.

La théorie des masses magnétiques ne diffère de celle des masses cosmiques que par la constitution bipolaire des premières et unipolaire des secondes. Mais comme on peut toujours supposer le pôle de nom contraire, reculé à l'infini, ou rapproché jusqu'à zéro, on arrive à cette conclusion assurément bizarre, mais purement mathématique, que l'on peut concevoir, un Univers, d'ailleurs imaginaire relativement à l'Univers cosmique, situé à l'infini, et conjugué vectoriel de l'Univers à distance finie, considéré comme réel.

La polarisation radiante, qui détermine un plan scalar, ou autrement dit qui est essentiellement plane, peut alors être considérée comme le conjugué vectoriel du mode précédent, et son effet modulaire à distance finie n'est autre que l'existence d'éther, à côté de celle de masse chimique. Ces notions, que nous ne pouvons indiquer ici que brièvement, trouveront leur développement naturel dans les applications du calcul vectoriel à la physique mathématique.

CHAPITRE II

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES VECTEURS

§ 1. — Définition des vecteurs

17. *Définition d'un quaternion.* — On appelle ***imaginaire*** toute quantité affectée du symbole $\sqrt{-1}$ de l'unité ***circulaire***. On appelle ***réelle*** toute quantité qui n'est pas affectée du symbole $\sqrt{-1}$.

Cette opération $\sqrt{-1}$ se présente dans les calculs toutes les fois que l'on veut extraire la racine carrée d'une quantité réelle négative ; elle est par suite une conséquence d'opérations exécutées conformément aux règles de l'arithmétique.

Par extension, beaucoup de géomètres ont appelé imaginaire, une quantité complexe, formée par l'addition d'une quantité réelle et d'une quantité imaginaire proprement dite, liées entre elles par la relation de continuité, telle que

$$(1) \qquad Q = A + B\sqrt{-1}$$

C'est la forme sous laquelle se présentent les racines imaginaires conjuguées d'une équation algébrique à coefficients réels. C'est aussi sous cette forme que se présentent les racines de l'unité dans les équations binômes à forme cartésienne $z^m \pm 1 = o$. Cette dernière n'est elle-même qu'un cas particulier de l'équation binôme versorielle $\text{II}(z) \pm 1 = o$. Ce qui montre qu'il y a une infinité de nombres z, qui peu-

vent produire l'unité par leur puissance soit rationnelle, soit vectorielle, ou autrement dit, que l'unité réelle ou imaginaire ont une infinité de valeurs distinctes.

Hamilton a donné à cette quantité complexe (1) le nom de *quaternion*. Il appelle *scalar* la partie réelle A, et *vecteur* la partie imaginaire B $\sqrt{-1}$. Comme nous considérons qu'un scalar est tout aussi bien un vecteur dont l'argument est déterminé comme celui de la partie imaginaire simple, nous appellerons *ternion* la partie imaginaire B $\sqrt{-1}$, et vecteur scalar ou simplement scalar la partie réelle A, et la quantité Q sera un vecteur quaternion.

En effet, dans une équation quelconque à forme cartésienne, c'est à dire, à forme réelle implicite, et même à coefficients réels explicites, la variable étant une quantité implicite, on ne sait pas à priori, si elle doit être réelle ou imaginaire, c'est à dire, scalar, ternion ou quaternion. Il est vrai que dans le cas particulier des équations algébriques rationnelles, et à coefficients réels, la théorie de ces équations nous apprend qu'elles se présentent sous la forme d'imaginaires conjuguées à plan verseur unique, d'ailleurs arbitraire. Mais il n'en est plus de même pour une équation à forme rationnelle et cartésienne dont les coefficients sont périodiques circulaires, ou sont des quaternions donnés. Or si l'inconnue est périodique, son verseur est variable aussi bien que son module, et elle est tour à tour quaternion, ternion ou scalar, suivant la valeur de son argument.

Un quaternion est un nombre circulaire, ou une quantité qui a la même valeur sur tout cercle formé par toutes les valeurs que l'on peut donner au signe $\sqrt{-1}$, perpendiculaires à l'axe scalar, et qui assignent le plan verseur de cette quantité.

Dans un quaternion-plan, c'est à dire, à plan verseur fixe, la valeur de l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$ a une direction déter-

minée de son plan-verseur, ou du tableau des quantités réelles, qui lui est perpendiculaire et qui en assigne la direction. En effet toute direction perpendiculaire à un plan ou à tout plan parallèle possède une direction unique, au signe près, qui est celle de l'unité imaginaire choisie.

Mais dans l'espace, cette direction, que nous désignerons par I, a une infinité de valeurs différentes comprises dans la formule

$$(2) \qquad I = i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma,$$

où i, j, k, expriment trois valeurs distinctes de l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$, de directions arbitraires, mais cependant assujetties à être perpendiculaires entr'elles, ou coordonnées. De sorte que l'on a la condition algébrique réelle

$$(3) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

et cette dernière équation montre que l'unité réelle a également une infinité de valeurs différentes.

18. *Principe fondamental.* — « Toute valeur I de l'unité circulaire $\sqrt{-1}$, a pour caractère fondamental de produire l'unité réelle négative par son carré ».

Ainsi l'on a généralement

$$(4) \qquad (\sqrt{-1})^2 = -1,$$

c'est à dire,

$$I^2 = -1,\ i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ k^2 = -1, \text{ etc.}$$

19. *Vecteurs et verseurs.* — On appelle aussi *vecteur* une quantité formée de deux facteurs, l'un numérique, nommé *module*, l'autre angulaire nommé *verseur*. Un verseur est généralement un quaternion-unité, et de la forme générale

$$(5) \qquad U = \cos\theta + I \sin\theta.$$

De sorte qu'un vecteur quaternion s'écrit aussi sous la forme

$$(6) \qquad Q = RU.$$

L'angle θ est l'*argument*, ou l'arc du verseur, I est toujours le ternion-unité, donné par la formule (2). Il asssigne la direction du plan du quaternion. On voit de plus, qu'il est aussi un verseur-quadrant, c'est à dire, la valeur que prend un verseur, lorsque l'argument est un quadrant, ou plus généralement, quand on a $\theta = \frac{2k+1}{2}\pi$, k étant un nombre entier réel positif ou négatif.

La forme additive (A + BI) d'un quaternion pourra s'appeler la forme *vectorielle*, et la forme de facteur RU, la forme *versorielle*.

Le passage de l'une à l'autre résulte de la transformation des coordonnées rectilignes en coordonnées sphériques. Il suffit, en effet, de poser dans le plan *verseur*

$$(7) \qquad \begin{cases} A = R\cos\theta, \\ B = R\sin\theta, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} R = \sqrt{A^2 + B^2}, \\ \text{tang}\,\theta = \dfrac{A}{B}. \end{cases}$$

Un quaternion qui se réduit à un ternion est un vecteur quadrant, c'est-à-dire un quaternion dont l'argument se réduit à un quadrant, ou dont la partie scalar est nulle ou indéterminée.

Un quaternion qui se réduit à un scalar est un vecteur biquadrant, ou dont la partie imaginaire est nulle ou indéterminée.

Un scalar ne diffère donc d'une quantité modulaire, qu'en ce qu'on le considère comme une quantité vectorielle, ayant une direction assignable, auquel cas il est accompagné d'un facteur périodique, ou d'une fonction circulaire réelle.

Un vecteur, qu'il soit scalar, ternion ou quaternion représente un élément géométrique linéaire déterminé de gran-

deur et de direction, qui en est la grandeur modulaire, son origine reste d'ailleurs arbitraire et il n'est pas déterminé de position.

On a proposé différentes formes équivalentes pour exprimer un verseur ; telles sont les suivantes :

$$(8) \qquad U = \cos\theta \pm I \sin\theta = e^{\pm I\theta} = I^{\pm \frac{2\theta}{\pi}}.$$

La première et la deuxième expression, données par Euler, résultent du développement de l'exponentielle népérienne linéaire. La dernière donnée par Hamilton exprime ce théorème que tout verseur est une puissance de son unité-ternion. Elle se déduit algébriquement de la précédente, en prenant le logarithme principal. En effet, on a :

$$(9) \qquad \log e^{I\theta} = I\theta, \quad I = e^{I\frac{\pi}{2}}, \quad \log I = I\frac{\pi}{2}.$$

La dernière expression définit la nature circulaire de l'unité imaginaire, et en élevant la seconde à la puissance $\frac{2\theta}{\pi}$, on retrouve l'égalité (8). Les définitions que nous présentons ici comme lemmes, résultent des théorèmes sur les quaternions.

20. *Propriétés générales des quaternions.* — 1° Un vecteur quaternion est une quantité numérique, c'est-à-dire, une espèce de nombre, dont la détermination dépend de quatre quantités réelles, d'où lui vient son nom. Premièrement, si l'on prend la forme versorielle

$$Q = RU = R(\cos\theta + I \sin\theta),$$

il faut connaître le module R, l'argument θ, et le ternion-unité I ; ce dernier d'après la formule (2) et la condition (3) dépend seulement de deux quantités angulaires réelles, indépendantes, ou des angles d'Euler (la longitude de la ligne des nœuds et l'angle polaire).

Deuxièment, si l'on prend la forme vectorielle.

$$Q = A + BI,$$

il faut connaître la grandeur numérique du vecteur scalar A et celle du vecteur ternion B ; ce qui détermine le module et l'argument du quaternion d'après les formules de transformation (7), et enfin le ternion-unité I, qui assigne le plan des deux droites modulaires A et B, et qui est toujours donné par la formule (2).

2° Si le vecteur scalar est nul, le quaternion se réduit à un ternion, qui ne dépend plus que de trois quantités réelles, d'où lui vient son nom.

3° On appelle quaternions-conjugués, deux quaternions qui ne diffèrent que par le signe de leur verseur-quadrant commun I. Leur produit est une quantité réelle égale au carré du module commun. En effet, on a

$$(10) \quad UU' = (\cos\theta + I\sin\theta)(\cos\theta - I\sin\theta) = 1,$$
$$QQ' = R^2 = A^2 + B^2 = (A + BI)(A - BI).$$

De cette relation algébrique découle la formule importante,

$$(11) \quad \cos\theta + I\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta}, \quad \text{ou } U = \frac{1}{U'},$$

c'est-à-dire que le verseur réciproque d'un quaternion est le verseur conjngué de ce quaternion. Si nous considérons le cas particulier où le verseur devient un quadrant, on en conclut la formule

$$(12) \quad \frac{1}{I} = -I, \quad \text{ou } \sqrt{-1} = -\frac{1}{\sqrt{-1}},$$

pour deux valeurs identiques de l'unité imaginaire.

4° Le réciproquc d'un verseur n'est donc pas simplement l'inverse de ce dernier mais son conjugué.

5° Le signe d'un quaternion doit porter sur le verseur, c'est-à-dire sur toute partie (A + B I). Ainsi, l'on a

$$Q = -A \pm BI = -(A \mp BI),$$

ou un quaternion négatif, quelque soit le signe de la partie ternion, ou de son verseur-quadrant.

6° « On peut toujours transformer un ternion en un quaternion, ou en un scalar et réciproquement. »

On transforme un ternion en un scalar, ou un vecteur imaginaire en un vecteur réel, en le multipliant par une même valeur de l'unité imaginaire (I), ce qui revient à augmenter son argument d'un quadrant dans le même plan et lui donne la direction d'un vecteur scalar-négatif. Si l'on opère par division, ce qui revient à multiplier par la même valeur changée de signe, ou à changer le sens de la rotation, on obtient la direction scalar positive. Réciproquement on transforme un vecteur scalar en un vecteur ternion en le multipliant par une valeur quelconque I de l'unité imaginaire. Comme cette opération revient à effectuer une rotation de 90° du vecteur primitif autour de la direction I, le rayon modulaire du ternion résultant dans sa seconde position est à angle droit de la direction primitive. Si l'on divisait par I cela reviendrait à faire tourner le rayon vecteur dans le même plan perpendiculaire à I, mais en sens inverse, et cela revient à changer simplement le signe du ternion en conservant le même sens de la rotation, c'est à dire l'opération par produit, conformément à la relation (12).

Cette transformation présente l'avantage de pouvoir traiter une expression radicale telle que $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, comme une expression linéaire $RI = R = iA + jB + kC$. Mais il faut observer, premièrement que la valeur de I est arbitraire, et par suite celle du plan verseur ou du tableau, secondement que la nouvelle direction modulaire est à 90° de la première dans le plan verseur perpendiculaire à I.

Pour ramener un verseur-quaternion à la forme d'un ternion, il suffit de le multiplier par son verseur *complé-*

mentaire. En effet, soit $U = \cos\theta + I \sin\theta$, le verseur du quaternion, nous aurons ;

$$(13) \quad U_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + I \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta + I \cos\theta$$
$$= I (\cos\theta - I \sin\theta) ;$$

d'où

$$UU_1 = I \quad \text{et } QU_1 = RI,$$

qui est un vecteur ternion.

Enfin pour transformer un quaternion en scalar, il suffit de le multiplier par son verseur conjugué. Cela revient à diminuer l'argument d'une même quantité, et le nouveau rayon modulaire sera dirigé suivant l'axe scalar.

7° « Un quaternion peut-être transporté dans son plan verseur, ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra dans son plan ».

En effet, dans un quaternion il n'y a de déterminé que la direction du verseur ternion-unité I, et les grandeurs modulaires A et B de deux droites rectangulaires entre elles et à la direction I. Or, en général, il faut 9 quantités angulaires réelles pour déterminer la direction de trois droites rectangulaires entre elles et 3 quantités numériques pour déterminer leurs modules. Dans la question présente, l'une de ces grandeurs est prise pour unité, et les quantités numériques se réduisent à deux, A et B. Quand aux 9 quantités angulaires, il n'y en a que trois d'arbitraires, qui seront si l'on veut les angles d'Euler (savoir les longitudes φ et φ_1 de la ligne des nœuds des plans verseurs, et l'angle polaire θ des axes ternions). Comme un quaternion n'en fait connaître que deux, car l'angle φ, reste indéterminé, et les angles (φ_1 et θ) déterminent la position relative de I, il en résulte que la position des deux autres droites A et B reste indéterminée dans tout plan perpendiculaire à la direction I. De plus l'origine est complètement arbitraire, car en

transportant le quaternion parallèlement à lui-même, aucune des quantités (I, A, B,) ne change de valeur et par suite le quaternion lui-même ne change pas de valeur.

§ II. — Addition vectorielle

21. *Définition de l'addition vectorielle.* — « On appelle addition vectorielle, l'opération du calcul vectoriel, qui consiste à porter à la suite les uns des autres, parallèlement à eux-mêmes une suite de vecteurs *modulaires*, et dans un certain ordre. »

Le vecteur qui ferme le contour ou qui joint l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier est le vecteur résultant pris en signe contraire.

« *Dans tout contour polygonal fermé, plan ou gauche, la somme vectorielle est nulle.* »

Cette sommation s'appelle une équation linéaire vectorielle. Elle a été appelée addition géométrique (Résal), résultant géométrique (Coriolis) ; mais sans désignation explicite de la notion de vecteurs.

La règle de l'addition est la même que les vecteurs soient scalars, ternions ou quaternions, ou en un mot quelque soit leur verseur, puisque chaque vecteur y entre avec sa propre direction. Il faudra donc distinguer soigneusement une addition algébrique, qui ne peut porter que sur des vecteurs ayant même unité de direction, d'une addition vectorielle qui exige une expression explicite de cette direction.

22. *Règle des signes.* — Soit trois points A, B, C, situés comme on voudra ; les trois droites qui les joignent deux à deux forment nécessairement un triangle ABC ; en parcou-

rant le contour dans un sens déterminé pour revenir au point de départ, on a la relation fondamentale

$$(14)\qquad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

et généralement pour un contour fermé, plan ou gauche, on aura en en suivant le contour dans le même sens pour revenir au point de départ,

$$(15)\qquad \overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{XY} + \overline{YA} = 0.$$

Considérons dans l'équation (14) le cas où l'un des points C, par exemple, coincide avec le point initial A, alors $\overline{CA}=0$ et $\overline{BC}$, devient $\overline{BA}$ et il reste

$$(16)\qquad \overline{AB} + \overline{BA} = 0, \quad \text{ou} \quad \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

Ainsi « *Changer le signe d'un vecteur revient à intervertir le sens dans lequel on le parcourt.* »

L'équation (14) peut alors s'écrire

$$(17)\qquad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Elle exprime que le vecteur $\overline{AC}$ est le vecteur résultant, ou la somme vectorielle des deux autres. La règle reste d'ailleurs la même si les vecteurs sont sur une même droite, ou ont même direction verseur. Elle restera donc applicable à un contour polygonal de vecteurs dans le plan scalar.

On est tellement familiarisé depuis Descartes avec la règle algébrique des signes $\pm$ des segments linéaires, que l'on s'étonne, dit Chasles, qu'on ne l'ait pas appliquée plutôt aux segments vectoriels. Cette application a débarrassé un grand nombre de questions géométriques principalement de l'obligation de considérer une suite de positions particulières, ou de cas particuliers, pour lesquels il fallait recommencer la construction et le raisonnement. Tel a été le sort du rapport harmonique quand on lui eut donné le signe — qui lui convient d'après la règle de l'addition des vecteurs. Chasles ajoute que la théorie de l'involution n'était abordable que

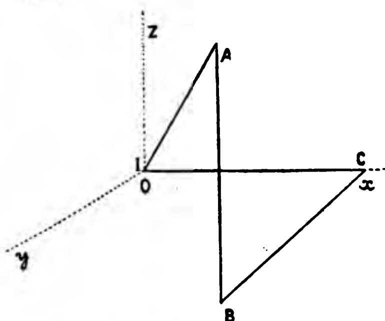
par le principe des segments vectoriels. Nous ajouterons, que l'on peut de même prévoir que la théorie du rapport anharmonique, et par suite le principe général de l'homographie n'est pas limité au cas où la valeur de ce rapport est purement numérique ou réelle.

23. *Vecteurs coordonnés.* — Considérons maintenant quatre points quelconques A, B, C, O, formant un contour fermé, tel que l'on ait l'équation

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CO} = o; \quad (18)$$

un côté quelconque sera la somme vectorielle des trois autres et si nous prenons le point O, par exemple, pour origine, nous aurons

$$\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CB} + \overline{BA}, \quad (19)$$



et $\overline{OA}$ est le vecteur résultant de la somme vectorielle des trois vecteurs composants du second membre, et nous pouvons les considérer comme menés parallèlement à trois directions ternions fixes, (Ox, Oy, Oz), de telle sorte que ce vecteur $\overline{OA}$ se trouve décomposé en trois autres ternions coordonnés. Réciproquement, trois vecteurs donnés en grandeur et en direction se composent en un seul vecteur qui ferme le contour polygonal constitué par des parallèles aux vecteurs donnés, et ajoutés à la suite les uns des autres dans un ordre donné.

Nous appellerons *soustraction* vectorielle, l'opération inverse du calcul vectoriel, qui consiste à transporter une suite de vecteurs formant un contour fermé ou non, paral-

lèlement à eux mêmes à une même origine. De même que l'opération directe donne à chaque vecteur un scalar, ayant un argument défini par cette addition, et qu'ils deviennent des quaternions ayant un plan verseur défini, ce que nous développerons en parlant de la sommation des quaternions ; de même lorsqu'on considère une addition de ternions, on doit les considérer comme ayant tous une origine commune, ce qui réduit leurs scalars à zéro, et il ne s'agit alors que d'une composition de vecteurs suivant trois directions coordonnées, qui peuvent être rectangulaires ou obliques entre eux. L'opération d'addition de vecteurs quelconques consiste donc à leur donner un plan scalar unique, d'ailleurs arbitraire ; l'opération vectorielle ayant eu déjà pour but de connaître un système de trois droites coordonnés rectangulaires, dont l'origine et la position sont entièrement arbitraires. C'est une conséquence de la relativité de la connaissance possible, d'après la définition des vecteurs (19). En un mot l'opération de l'addition vectorielle consiste à rendre comparables les vecteurs entre eux et à les ramener à un système ternion coordonné, et à un plan scalar unique, condition constituant la quatrième coordonnée d'un quaternion.

Si les trois directions coordonnées sont rectangulaires entre elles, la géométrie nous apprend que chacun des vecteurs composants a pour grandeur modulaire la projection orthogonale du module du vecteur résultant sur sa direction, c'est-à-dire, qu'elle est égale aux cosinus de l'angle compris. Dans le cas d'axes obliques, les projections suivant les directions coordonnées sont des fonctions linéaires scalars des projections orthogonales, et des cosinus des angles des faces du trièdre des axes. Si donc le vecteur $\overline{\mathrm{OA}}$ a pour mesure de direction l'unité imaginaire I′, et pour grandeur l'unité réelle ± 1, nous pouvons écrire en supposant tous les vecteurs transportés à l'origine

$$\text{(20)} \qquad I' = I\,x + J\,y + K\,z,$$

où I, J, K, sont les directions des trois vecteurs coordonnés. Si ces directions sont rectangulaires entre elles, nous écrirons

(21) $$I' = i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma.$$

D'ailleurs, chacun des vecteurs-unité I, J, K, est de la forme (21). Si nous posons pour abréger

(22) $$\begin{cases} A = x \cos\alpha + y \cos\alpha' + z \cos\alpha'', \\ B = x \cos\beta + y \cos\beta' + z \cos\beta'', \\ C = x \cos\gamma + y \cos\gamma' + z \cos\gamma''; \end{cases}$$

l'équation (20) prendra la forme

(23) $$I' = i\,A + j\,B + k\,C,$$

où les A, B, C, sont des fonctions linéaires des x, y, z, telles que l'on ait l'équation de condition réelle

(24) $$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

résultant de la condition de perpendicularité des directions (i, j, k).

24. *Directions coordonnées.* — Nous avons considéré le vecteur $\overline{OA}$ comme ayant l'unité réelle comme module, et toute direction coordonnée comme étant une valeur donnée de l'unité, et ayant pour module l'unité réelle, auquel cas les quantités scalars sont des fonctions linéaires des cosinus, mais le vecteur $\overline{OA}$ peut avoir une longueur modulaire quelconque. Soit $l'r = \rho$ ce ternion, nous aurons généralement

(23) $$\overline{OC} = Ix,\ \overline{CB} = Jy,\ \overline{BA} = Kz.$$

Hamilton et Tait dans leurs savantes recherches sur le calcul des quaternions ne sont pas toujours suffisamment explicites sur la mesure modulaire des composantes ternions coordonnées, et l'emploi qu'ils font indifféremment de vecteurs ternions-unité, qui sont de purs signes de direction, ayant l'unité réelle pour module et celui de vecteurs coor-

donnés ayant un module numérique donné est parfois une source d'obscurité dans le maniement des formules. Il semblerait même que ces auteurs aient considéré les ternions coordonnés comme pouvant avoir des valeurs numériques arbitraires autres que celle de l'unité. C'eut été une confusion insupportable si leur perspicacité ne leur eut fait rétablir l'homogenéité par un facteur modulaire produit des modules coordonnés, ce qui ramène la question, par la suppression de ce facteur commun à une sommation de ternions-unité, multipliés respectivement par les modules des vecteurs composants. Pour le montrer, supposons que l'on exprime l'équation vectorielle ternion (19) sous la forme

$$\rho = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

où les x, y, z, sont des facteurs numériques réels, et les α, β, γ, des ternions coordonnés, qui sont supposés avoir des modules constants donnés, et soit alors leurs valeurs définies.

$$\begin{cases} \alpha = \mathrm{I}\, p = p\,(i \cos a + j \cos a' + k \cos a''), \\ \beta = \mathrm{J}\, q = q\,(i \cos b + j \cos b' + k \cos b''), \\ \gamma = \mathrm{K}\, r = r\,(i \cos c + j \cos c' + k \cos c''), \end{cases}$$

où les p, q, r, conservent entre eux des rapports constants, et où les I, J, K, désignent des ternions-unité, obliques ou rectangulaires entre eux, peu importe. Si nous substituons ces valeurs dans celle de ρ on mettra cette dernière sous la forme rectangulaire

$$\rho = i\,\mathrm{P} + j\,\mathrm{Q} + k\,\mathrm{R},$$

avec la condition algébrique $\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}^2=\mathrm{S}^2$, ou S doit être le module du vecteur ρ, quelle soit sa direction, et où l'on a posé pour abréger

$$\begin{cases} \mathrm{P} = p\,x \cos a + q\,y \cos b + r\,z \cos c, \\ \mathrm{Q} = p\,x \cos a' + q\,y \cos b' + r\,z \cos c', \\ \mathrm{R} = p\,x \cos a'' + q\,y \cos b'' + r\,z \cos c''; \end{cases}$$

nous aurons pour la valeur numérique du module S

$$S^2 = p^2 x^2 + q^2 y^2 + r^2 z^2 + 2pq \cos(\mathrm{I\,J}) + 2qr \cos(\mathrm{J\,K}) + \\ + 2rp \cos(\mathrm{KI});$$

si d'ailleurs les ternions coordonnés étaient rectangulaires, on aurait

$$\cos(\mathrm{IJ}) = 0, \quad \cos(\mathrm{JK}) = 0, \quad \cos(\mathrm{KI}) = 0,$$

et nous aurions encore

$$S^2 = p^2 x^2 + q^2 y^2 + r^2 z^2$$

et la valeur de ρ prendrait la forme

$$\rho = \mathrm{I}\, px + \mathrm{J}\, qy + \mathrm{K}\, rx.$$

Mais les I, J, K, étant ici rectangulaires entre eux, les px, qy, vz, sont respectivement les projections orthogonales du module du ternion ρ, et par suite les x, y, z ne peuvent pas être ces projections, puisqu'elles sont accompagnées de facteurs relatifs à chaque direction coordonnée, et comme la direction des axes coordonnés doit rester arbitraire, on aurait ce résultat contradictoire que la valeur du module du vecteur dépendrait de cette direction. Il faut donc, puisque ρ conserve le même module, quelles que soient les directions coordonnées, que l'on ait $p=q=r=1$, ou que α, β, γ, soient des ternions-unité.

Il n'en serait plus de même, si les x, y, z étaient des variables scalars, et les p, q, r des paramètres donnés, le vecteur variable ρ décrirait un lieu géométrique ; on a alors une équation linéaire vectorielle, que nous étudierons en parlant des fonctions vectorielles.

25. *Permutation des termes.* — Quand on permute entre eux les termes d'une addition vectorielle, on change l'ordre de l'addition des vecteurs, et à chaque permutation répond un nouveau contour différent du premier, puisque les angles plans sont différents et le contour fermé pourra cependant satisfaire à l'équation linéaire qui résulte de ce

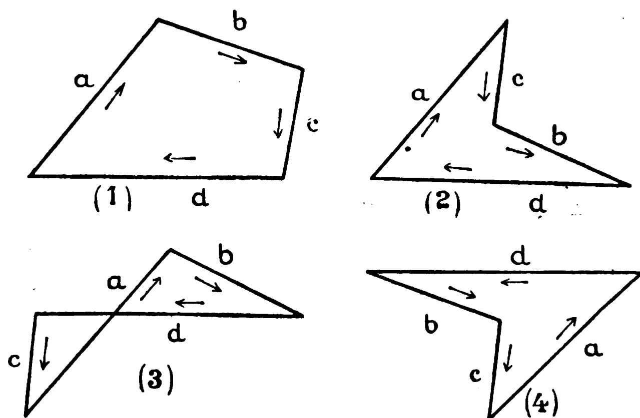
changement, puisque les vecteurs sont toujours ajoutés parallèlement à eux-mêmes, et avec un même signe.

Chaque permutation circulaire donnera un contour polygonal de même forme, car cela ne fera que changer l'origine du contour, et non l'ordre de l'addition des vecteurs.

Si, donc l'équation a n termes, et par suite le contour polygonal n cotés, il y aura n permutations circulaires. Il restera donc (n-1) ! permutations non circulaires, qui se partagent en deux groupes de figures de même forme, mais non superposables en général, en désignant comme à l'ordinaire par n ! le produit 1.2.3... n.

Soit comme exemple simple, le quadrilatère plan ou gauche, peu importe, $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}=o$, où les a, b, c, d, sont des vecteurs donnés en grandeur et en direction, et soit fig (1) le quadrilatère modulaire vu en perspective plane, résultant de cette addition vectorielle.

Sur les 24 permutations positives, il y aura trois formes différentes, pour chacune desquelles il y aura 4 permutations circulaires qui ne font que transporter le polygone parallèlement à lui-même. Les trois formes différentes (1), (2), (3), forment deux groupes distincts de même forme comme (2) et (4), mais différemment placés.



On voit que pour le triangle il n'y a qu'une forme, formant deux positions symétriques qui complètent un parallélogramme.

On peut voir, par le même raisonnement qu'un pentagone plan ou gauche donnera généralement 12 figures différentes, chacune des quelles aura 5 permutations circulaires, et 24 opposées deux à deux.

On pourra ensuite avoir des permutations de deux en deux, de trois en trois, etc.

Si l'on considère les diagonales d'un parallélipipède comme le quatrième côté d'un quadrilatère gauche, on peut voir, qu'à chaque permutation positive ou négative répondra une diagonale distincte et un contour déterminé, ce qui distingue essentiellement le calcul vectoriel du calcul algébrique, qui laisse indéterminée la nature du contour polygonal, formé avec n côtés. On ne peut donc pas dire, que le principe, dit de commutabilité soit observé, car en intervertissant l'ordre des termes on obtient un vecteur résultant qui peut être tout différent. Mais il est évident que l'on peut toujours substituer à la somme de deux vecteurs consécutifs leur vecteur résultant, ce que l'on a appelé le principe associatif, qui n'est autre que le principe même de l'addition vectorielle. Du reste le principe de continuité géométrique rend inutile ces diverses dénominations qui n'ont pas de critérium qui en justifie l'emploi, et les règles algébriques donnent tous les cas sans ambiguité.

§ III. — Addition versorielle

26. *Définition de l'addition versorielle.* — On appellera addition ou sommation *versorielle*, l'opération du

calcul vectoriel qui consiste à porter sur la sphère-unité des arcs verseurs donnés à la suite les uns des autres parallèlement à eux-mêmes et dans un certain ordre.

L'arc qui ferme le contour polygonal sphérique est le verseur résultant en grandeur et en direction.

Cette sommation versorielle s'appelle une équation versorielle linéaire. En désignant par J le ternion-unité qui assigne la direction du plan verseur et l'argument par ω, on aura pour un contour fermé

$$(23) \qquad J_1\,\omega_1 + J_2\,\omega_2 + J_3\,\omega_3 + \cdots = 0$$

Une addition versorielle exprime un produit algébrique de quaternions-unités, absolument comme une sommation de logarithmes exprime le logarithme du produit des facteurs. En effet, cette équation provient de la sommation angulaire de l'équation exponentielle.

$$(24) \qquad e^{J_1\,\omega_1 + J_2\,\omega_2 + J_3\,\omega_3 + \cdots} = +1$$

qui n'est elle-même autre chose que l'expression du produit consécutif des verseurs.

$$(25) \quad \left(\cos\omega_1 + J_1 \sin\omega_1\right)\left(\cos\omega_2 + J_2 \sin\omega_2\right) \ldots = (\mp)^m.$$

D'ailleurs s'il s'agit de vecteurs, nous pouvons faire abstraction des modules, les mettre en facteur commun et les soumettre au calcul algébrique ordinaire, et ils disparaîtront de l'équation versorielle. En prenant le logarithme nous passons de la fonction directe à la fonction angulaire inverse.

Ainsi un produit de verseurs quelconque exprime une addition sphérique. Nous avons vu que le caractère des quantités verseurs était de pouvoir être transportées dans leur plan-verseur, ou dans tout autre plan-parallèle et tournées comme on voudra dans ce plan ; on pourra donc toujours exécuter une addition sphérique, absolument comme

une addition linéaire, en transportant les verseurs donnés parallèlement à eux-mêmes en un point pris pour centre de la sphère-unité, et les faire tourner dans le sens qu'ils portent jusqu'à ce qu'ils rencontrent le plan du verseur précédent.

27. *Règle des signes.* — Considérons un triangle sphérique ABC, dont les arcs de grand cercle sont parcourus dans le même sens et ramènent au point de départ, on a la relation fondamentale

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 0, \tag{26}$$

qui exprime la sommation des arguments des verseurs en grandeur et en direction sur la sphère. L'on voit que cette règle est identique avec celle de la sommation vectorielle. On en conclut en répétant les mêmes raisonnements que l'on a

$$\widehat{AB} = -\widehat{BA}. \tag{27}$$

C'est-à-dire « changer le signe de l'argument d'un verseur revient à changer le sens suivant lequel on le décrit dans son plan verseur, l'axe polaire étant déterminé par la valeur du ternion-unité facteur. »

On aura donc pour un polygone sphérique fermé quelconque

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \cdots \widehat{XY} + \widehat{YA} = 0, \tag{28}$$

en décrivant le contour d'une manière continue dans le même sens pour revenir au point de départ, c'est-à-dire, en suivant l'ordre et le signe des termes de l'équation (28). Si les verseurs se réduisent à des ternions, leur argument se réduit à $\frac{\pi}{2}$, et la règle reste la même. Si les verseurs se réduisent à des scalars, leur argument étant multiple de π,

l'argument devient nul, et le terme non périodique disparait de l'équation linéaire, ou ne fait que multiplier l'équation par le facteur ± 1, de sorte que les multiples pairs ramènent sur la sphère au point de départ, et les multiples impairs ne font que changer le signe du produit des verseurs sans en changer la valeur, et l'on a ce que l'on appelle un fuseau ; mais le contour ne peut être fermé, à moins que l'équation (24) ne présente le signe $+$, car autrement pour fermer le coutour, il faudrait ajouter un nouvel arc d'une demi circonférence, dans un sens ou dans l'autre, suivant le signe du ternion, qui du reste est arbitraire tant qu'il n'est pas exprimé explicitement dans la somme versorielle.

Les termes de l'addition versorielle ou sphérique sont composés de deux facteurs, et comme le changement de signe d'un argument équivaut à un changement de signe du ternion-unité et vice-versa,il en résulte que le signe d'un terme ne change pas quand on change à la fois le signe de l'arc et celui de son ternion-unité, comme on peut le vérifier directement sur la sphère. On peut toujours choisir le sens direct de la rotation, pourvu qu'on le conserve dans tout le cours du raisonnement ou des transformations des figures.

On peut choisir le sens sinistrorsum ou le sens dextrorsum. Ce dernier, qui est aussi le sens horaireet ampérien, est le plus usité.

On a donné la règle de l'addition versorielle dans un sphérique, sous cette forme : « Si dans un triangle les arcs facteurs sont $\overset{\wedge}{AB}$, et $\overset{\wedge}{CB}$, en grandeur et en direction, on prend le produit des verseurs de telle sorte que le multiplicande ait la même origine que le verseur produit et que le multiplicateur ait la même extrémité que ce verseur produit. »

Mais on voit facilement qu'il suffit de tenir compte de

l'ordre et du signe des termes dans la sommation des arcs, et que la règle algébrique est applicable directement et sans ambiguité à tout contour polygonal sphériqne.

28. *Ordre des facteurs.* — Des verseurs, quoique ayant des arguments égaux numériquement, ne sont pas pour cela des verseurs égaux, et il faut de plus qu'ils aient le même ternion unité, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à une même circonférence de la sphère-unité.

Théorème. « *Quand on intervertit l'ordre des termes d'une addition versorielle on change la forme du polygone sphérique bien que le polygone sphérique reste toujours continu et fermé, ou que l'équation versorielle soit satisfaite.* »

En effet, à chaque permutation non circulaire répond un polygone sphérique différent, absolument comme nous l'avons vu pour un polygone rectiligne dans l'espace, et les conséquences sont les mêmes. Toutefois, il faut observer que les segments conjugés d'une droite vont à l'infini, tandis que sur la sphère leur période est finie et un arc comprend toujours son supplément circulaire. C'est pourquoi la sommation sphérique de deux verseurs dépend à la fois de l'ordre des facteurs et du signe de l'argument.

En effet, le triangle ABC n'est pas le seul que l'on puisse former par l'intersection de trois circonférences de cercle, et à chaque permutation des termes et du signe de ces termes répond un triangle défini sur la sphère, et les huit permutations que l'on peut faire sur l'équation versorielle à trois termes donneront les positions des huit triangles sphériques, qui sont toutes distinctes, ce qui est le caractère du calcul vectoriel.

L'on sait d'ailleurs que dans l'équation $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 + J_3\omega_3 = 0$ les valeurs des arguments ω ne sont pas arbitraires, ni celles des J, qui déterminent les angles dièdres ε ; et

qu'ils doivent satisfaire aux conditions connues des pyramides, savoir :

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_2 < 2\pi, & \omega_1 + \omega_2 > \omega_3, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > \pi < 3\pi, & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \pi + \varepsilon_3. \end{cases}$$

L'on sait qu'un triangle sphérique a pour mesure de surface l'excès de la somme de ses arguments sur la demi circonférence ou

$$S = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \pi).$$

De même la surface d'un contour polygonal sphérique a pour mesure la somme de ses arguments, moins le produit de π par le nombre (n-2) des côtés du polygone.

$$S = \Sigma\omega - \pi\,(n-2),$$

où l'on a 4π pour la surface totale de la sphère-unité.

Ces derniers théorèmes appartiennent à la Géométrie Euclidienne ou du fini ; ce qui est particulier au calcul vectoriel, c'est la multiplicité des contours produits par la permutation des termes, de telle sorte qu'à chaque permutation appartient un contour ou un trajet défini. Détermination qui ne pouvait avoir lieu sans la notion vectorielle.

§ IV. — La fonction exponentielle linéaire

29. *Son expression en quaternion.* — La fonction exponentielle linéaire n'est pas autre chose que la fonction vectorielle directe, comme le logarithme est la fonction circulaire inverse. De sorte que le calcul vectoriel n'est autre chose que le développement du calcul des exponentielles.

En effet, il y a, comme nous l'apprend la trigonométrie une liaison intime entre la fonction exponentielle et les fonctions

trigonométriques, et cette relation est précisément celle de l'unité réelle et imaginaire. De telle sorte qu'une fonction exponentielle linéaire d'une variable ternion, exprime une fonction trigonométrique ou une telle relation algébrique de fonctions trigonométriques, et réciproquement une fonction trigonométrique à variable angulaire imaginaire exprime une fonction exponentielle à variable linéaire et réelle, ou une relation algébrique de telles exponentielles.

Soit $e^z = e^{a+bi}$ une exponentielle linéaire d'un quaternion z ; elle est équivalente à un quaternion

$$Q = e^a (\cos b + i \sin b),$$

où e^a est le module du quaternion et b l'argument du verseur ; on voit que a peut s'appeler l'argument du module : a est un logarithme réel, et b un logarithme imaginaire, et l'on peut tout aussi bien dire que a est une quantité angulaire imaginaire et b une quantité angulaire réelle, ou simplement un argument de l'exponentielle népérienne.

Autrement dit : un quaternion, c'est-à-dire, un vecteur quelconque, s'exprime par une exponentielle népérienne dans laquelle le logarithme réel est l'argument modulaire, et le logarithme imaginaire est l'argument verseur. En effet, on a les relations algébriques.

$$Q = A + i B, = e^{a+bi} = R (\cos b + i \sin b)$$

et $$a = \log R, \qquad bi = \log (\cos b + i \sin b).$$

Si l'on change B en — B, il suffit de changer b en $-b$, ce qui revient à augmenter l'azimut du verseur de π. Or, de même que nous avons

$$e^{bi} = \cos b + i \sin b, \quad e^a = \cos (ai) + i \sin (ai),$$

nous pouvons poser d'une manière générale

$$e^z = \cos (zi) + i \sin (zi),$$

où z est un quaternion quelconque $z = a + bi$ et i, une

valeur arbitraire de l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$. Car nous pouvons écrire l'expression précédente en développant le second membre sous la forme

$$e^{z} = \{ \cos(ai) + i \sin(ai) \} \{ \cos(b) + i \sin(b) \}.$$

Ainsi, par exemple, on a les formules connues

$$\left\{\begin{aligned} e^{bi} &= \cos b + i \sin b, \\ e^{-bi} &= \cos b - i \sin b, \end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} \cos b &= \frac{e^{bi} + e^{-bi}}{2}, \\ i \sin b &= \frac{e^{bi} - e^{-bi}}{2}. \end{aligned}\right.$$

Si nous changeons b en bi, on aura

$$\left\{\begin{aligned} e^{b} &= \cos(bi) + i \sin(bi), \\ e^{-b} &= \cos(bi) - i \sin(bi), \end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} \cos(bi) &= \frac{e^{b} + e^{-b}}{2}, \\ i \sin(bi) &= \frac{e^{b} - e^{-b}}{2}. \end{aligned}\right.$$

Les premières fonctions étant appelées circulaires, les secondes sont dites hyperboliques. C'est en effet l'hyperbole qui est la figure corrélative qui répond à l'imaginarité du cercle, et réciproquement. Les courbes conjuguées sont à angle droit l'une sur l'autre. Comme le ternion-unité i peut prendre une infinité de directions pour un cercle donné, il y aura une infinité d'hyperboles qui forment un hyperboloïde de révolution à une nappe et pour une position donnée d'une hyperbole, il y aura réciproquement une infinité de cercles qui forment la sphère conjuguée des hyperboloïdes.

30. *Sa périodicité circulaire.* — La fonction exponentielle linéaire, qu'elle soit scalar, ternion ou quaternion a une période $2k\pi i$, k étant un nombre entier positif ou négatif et i une valeur quelconque de l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$

D'une manière correlative les fonctions trigonométriques ont une périodique réelle $2k\pi$ quelque soit l'entier k, et la valeur de l'unité imaginaire, c'est-à-dire que l'on a

$$e^{z + 2k\pi i} = e^z, \quad \cos(z + 2k\pi) = \cos z.$$

Cela revient en effet à multiplier l'exponentielle par une valeur quelconque de l'unité réelle

$$1 = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi),$$

ou à augmenter l'argument d'un nombre quelconque de circonférences entières, ce qui ramène toujours au même point de départ sur la sphère, ou au même axe scalar sur le plan.

La fonction exponentielle n'a pas d'autre période que celle de l'unité circulaire, et les fonctions trigonométriques n'ont pas d'autre période que la circonférence d'un grand cercle.

De plus la fonction e^z est uniforme, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de la variable z dans un champ répond une seule valeur de la fonction $u=e^z$, mais comme cette fonction est périodique, la fonction inverse $z = \log u$ a une infinité de valeurs en progression arithmétique répondant à une même valeur de la fonction exponentielle. Pour représenter cette périodicité nous pouvons considérer une direction particulière du plan verseur ou de la valeur de l'unité imaginaire, et mener une suite de plans parallèles au plan verseur et équidistants de 2π. On obtiendra les points correspondants à une valeur particulière $u_1 = e^{z_1}$ de la fonction exponentielle en prenant les points correspondants dans chaque tranche dont l'abrisse est a_1 et l'ordonnée h_1, en supposant $z_1 = a_1 + h_1 i$, de telle sorte que si z décrit un trajet quelconque compris entre deux plans consécutifs, la fonction peut prendre toutes les valeurs possibles entre ∞ et $+\infty$, et ne prendre qu'une seule fois ces valeurs dans chaque tranche, de telle sorte que chaque point correspondant décrit le même trajet

répété dans chaque tranche, et diffère d'un autre par un multiple de $2\pi i$, i restant constant, et l'on a généralement

$$\log u = z + 2\pi k i.$$

Nous avons considéré la périodicité planaire, en supposant la valeur i constante ; nous pouvons maintenant considérer la périodicité sphérique en laissant k constant et en décrivant des sphères concentriques dont les rayons croissent en progression arithmétique. On obtiendra les points correspondants à une valeur particulière de $u_1 = e^{z_1}$ de la fonction exponentielle, en prenant pour un trajet quelconque compris entre les deux couches sphériques consécutives les points correspondants sur un même rayon, les trajets se trouveront sur une spirale logarithmique.

31. *Multiplicité de la fonction logarithme.* — Les logarithmes des quantités réelles et imaginaires ayant une suite des valeurs périodiques en nombre infini, il en résulte que même en ne considérant que les vecteurs quadrants principaux, le produit des facteurs d'une même quantité peut avoir plusieurs valeurs différentes, attendu que l'on peut prendre pour chaque facteur ayant même module des valeurs différentes de l'axe ternion $\sqrt{-1}$. C'est ainsi que le logarithme de aa, diffère généralement de celui de a^2. En effet, puisque l'on a $\log a = \log \bar{a} + 2\, k\pi i$, on aura généralement

$$\log aa = 2 \log \overline{a} + 2\, \pi\, (ki + k'i')$$

On voit que la valeur est réelle si l'on a $k\, i + k'\, i' = o$, c'est-à-dire $i + i' = o$ et $k = k'$, ou si les ternions des facteurs sont conjugués et parallèles.

32. *Logarithmes de l'unité.* — Si dans la formule $u = e^{z + 2k\pi i}$, où $z = a + b\, i$, nous faisons $a = o$, ce

qui réduit le module du quaternion à l'unité, nous aurons un verseur-unité. Soit alors

$$u = \cos b + i \sin b.$$

1° Si nous faisons $b = 2k\pi$, k étant un nombre entier positif ou négatif, nous aurons, puisque $\cos(2k\pi) = 1$ et $\sin(2k\pi) = o$,

$$1 = e^{2k\pi i} \text{ et } \log 1 = 2k\pi i.$$

On pourra donc ajouter cette quantité à tout logarithme puisque cela revient à multiplier une exponentielle ou un quaternion quelconque par le facteur 1. La seul valeur réelle de log 1 est zéro.

2° Si nous faisons $b = (2k + 1)\pi$, $2k + 1$ exprimant un nombre impair positif ou négatif, on a $\cos(2k + 1)\pi = -1$ et $\sin(2k + 1)\pi = o$, et par suite

$$-1 = e^{(2k+1)\pi i}, \log -1 = (2k + 1)\pi i.$$

On pourra donc ajouter cette quantité à tout logarithme, puisque cela revient à introduire l'unité réelle négative comme facteur d'un quaternion, ce qui en change le signe sans en changer la valeur, et l'on a généralement

$$e^{z + (2k+1)\pi i} = -e^z.$$

3° Si nous prenons maintenant $b = \frac{2k + 1}{2}\pi$, k étant toujours un nombre entier positif ou négatif, nous aurons

$$\pm\sqrt{-1} = e^{\frac{2k1 \pm 1}{2}\pi\sqrt{-1}}, \log \pm \sqrt{-1} = \frac{2k \pm 1}{2}\pi\sqrt{-1};$$

la valeur de $\sqrt{-1}$ étant quelconque, pouvu qu'elle soit la même dans les deux membres.

En faisant $k = o$ dans les expressions précédentes on a les quatre valeurs *principales* de l'unité. Ces quatre valeurs forment les quatre quadrants d'une période circulaire, dans

laquelle chaque terme se déduit du précédent le multipliant par $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$, comme nous l'avons vu dans les préliminaires.

33. *Puissance vectorielle.* — Considérons maintenant l'expression

$$Q = (A + Bi)^{m+ni}.$$

Nous supposons ici que la valeur du ternion unité i est la même dans la base et dans l'exposant, c'est-à-dire que $A + Bi$ et $m + ni$ ont des plans verseurs parallèles. Par suite A et m sont des coordonnées parallèles à un même plan, et B et n sont des directions parallèles entre elles.

Si nous supposons de plus que m et n soient des nombres rationnels, la formule du binôme sera applicable dans sa forme habituelle et la formule de Moivre donnera, en mettant l'expression précédente sous la formule exponentielle,

$$Q = \{ r (\cos + i \sin b) \}^{m+ni} = e^{(a+bi)(m+ni)}$$
$$= e^{(am - bn) + i (an + bm)}.$$

Si nous posons $s = am - b\,n$, $t = an + b\,m$, nous pourrons écrire

$$Q = e^{s+it} = R (\cos t + i \sin t).$$

Il en résulte que l'argument modulaire fournit un argument verseur et que l'argument verseur fournit un argument modulaire.

Si nous désignons par k l'argument de la période de b, et par k' celui de la période de n, et enfin par k_1 celui de la période de t, nous aurons les deux équations

$$\begin{cases} s = am - (b + 2\,k\,\pi)\,(n + 2\,k'\,\pi) \\ t = a\,(n + 2\,k'\,\pi) + m\,(b + 2\,k\,\pi) + 2\,k_1\,\pi. \end{cases}$$

L'élimination de k et de k' entre ces deux équations conduira

à une équation du second degré dont on trouvera une étude dans Houel (quantités complexes). Si nous supposons que l'argument de la puissance ou de $m+ni$ est déterminé ou constant, et que nous fassions $k_1 = o$, nous aurons en éliminant k le cas traité par Houel.

Nous avons supposé que les valeurs de l'unité imaginaire étaient les mêmes dans la base et dans l'exposant ; mais en général une fonction Q^q, où Q et q sont des quaternions quelconque de plans verseurs différents, est en général une fonction hypercirculaire conduisant à des fonctions à plusieurs périodes, dont la forme sin (sin x) est un cas particulier, et dont nous ne pouvons nous occuper dans un traité élémentaire, et dont l'étude est d'ailleurs peu connue.

34. *De la fonction* $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$. — Considérons dans la quantité $Q = (A + Bi)^{(m+ni)}$, le cas particulier où les quantités scalars sont nulles, et faisons de plus $B = 1$ et $n = 1$, elle se réduit à la forme $Q = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

Si nous prenons les logarithmes, nous trouverons

$$\log \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} \log \sqrt{-1} =$$

$$= e^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi\sqrt{-1}\left(\frac{2k'+1}{2}\right)\pi\sqrt{-1}}$$

et en supposant $k = k'$, on a

$$\log \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

On en conclut que les puissances successives de même argument de la fonction hypercirculaire-unité $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}$

jouissent de la propriété de se réduire toutes soit à la quantité $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{\pm\frac{\pi}{2}}$, ou $\sqrt{-1} = e^{\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ suivant que le nombre des facteurs est pair ou impair, et la série est périodique. Nous trouvons de même que les puissances entières de la fonction principale $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ sont périodiques, et l'on a

$$\begin{cases} \sqrt{-1}^{2\sqrt{-1}} = (-1)^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^2}, \\ \sqrt{-1}^{3\sqrt{-1}} = (-\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^3}, \\ \sqrt{-1}^{4\sqrt{-1}} = {}_1\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

ce qui montre la singulière propriété de cette fonction transcendente de pouvoir échanger la base en exposant et réciproquement dans l'exponentielle $\sqrt{-1}$.

CHAPITRE III

THÉORIE DES VERSEURS

§ I. — Verseurs-quadrants rectangulaires

35. *Systèmes de verseurs rectangulaires.* — Nous avons donné dans le chapitre précédent des définitions destinées à familiariser le lecteur avec la nature des verseurs. Nous avons maintenant à aborder la démonstration de leurs propriétés algébriques. Comme le calcul des verseurs-quadrants ou de l'unité imaginaire est la base du calcul vectoriel, nous devons commencer par cette étude. Nous avons vu qu'un verseur-quadrant n'est autre chose qu'une valeur définie de l'unité imaginaire circulaire $\sqrt{-1}$, et qu'il s'exprime par un ternion-unité qui assigne le plan de ce verseur ; réciproquement tout ternion-unité I a pour verseur un arc de 90°, qui est perpendiculaire à sa direction. Autrement dit : « L'unité imaginaire a pour expression réelle un arc de 90° dont le plan est défini par sa direction. »

Nous avons vu qu'une addition de verseurs sur la sphère-unité, s'exprime par un produit algébrique de ces verseurs.

Considérons deux systèmes de trois ternions-unité respectivement perpendiculaires entre eux, que nous désignerons par (i, j, k) et (I, J, K). Nous pouvons considérer chacun d'eux comme la résultante vectorielle de trois composantes

orthogonales relatives aux directions coordonnées de l'autre système (n° 23).

Nous aurons ainsi un système simultanné d'équations vectorielles linéaires ternions, savoir :

$$(1)\left\{\begin{aligned} I &= ia + ja' + ka'',\\ J &= ib + jb' + kb'',\\ K &= ic + jc' + kc''; \end{aligned}\right. \qquad (2)\left\{\begin{aligned} i &= Ia + Jb + Kc,\\ j &= Ia' + Jb' + Kc',\\ k &= Ia'' + Jb'' + Kc''. \end{aligned}\right.$$

Les (a^i, b^i, c^i) ne sont autre chose que les cosinus qui assignent la position relative des deux systèmes rectangulaires. La correspondance sera donnée par le tableau suivant :

(a)

	i	j	k
I	a	a'	a''
J	b	b'	b''
K	c	c'	c''

$$(b)\left\{\begin{aligned} &a=\cos(Ii), && a'=\cos(Ij), && a''=\cos(Ik),\\ &b=\cos(Ji), && b'=\cos(Jj), && b''=\cos(Jk),\\ &c=\cos(Ki), && c'=\cos(Kj), && c''=\cos(Kk). \end{aligned}\right.$$

Nous avons par la trigonométrie : 1° Six relations algébriques qui proviennent de la condition de perpendicularité des directions (I, J, K) entre elles :

$$(3)\left\{\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1,\\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1,\\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1; \end{aligned}\right. \qquad (4)\left\{\begin{aligned} bc + b'c' + b''c'' &= o,\\ ca + c'a' + c''a'' &= o,\\ ab + a'b' + a''b'' &= o; \end{aligned}\right.$$

2° Six autres relations inverses, qui proviennent de la même manière de la condition de perpendicularité des directions (i, j, k) entre elles :

$$(5)\left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1,\\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1,\\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned}\right. \qquad (6)\left\{\begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= o,\\ a''a + b''b + c''c &= o,\\ aa' + bb' + cc' &= o. \end{aligned}\right.$$

3° Neuf relations binômes, qui sont les déterminants mineurs du déterminant $(ab'c'') = 1$, qui est réciproque :

$$(7)\quad \begin{cases} a = b'c'' - b''c', & b = c'a'' - a''c', & c = a'b'' - a''b', \\ a' = b''c - bc'', & b' = c''a - ca'', & c' = a''b - ab'' \\ a'' = bc' - b'c; & b'' = ca' - c'a; & c'' = ab' - a'b. \end{cases}$$

4° Si nous y joignons la propriété fondamentale de toutes les valeurs de l'unité imaginaire, savoir :

$$(8)\qquad (\sqrt{-1})^2 = -1,$$

nous pouvons en déduire immédiatement toutes les propriétés algébriques des ternions-unité rectangulaires quelconques.

Réciproquement, si l'on connaissait d'autre part les relations algébriques des ternions-unité trirectangulaires, on retrouverait les relations algébriques qui lient entre eux les cosinus (a^i, b^i, c^i).

36. Théorème I. — « *Le produit de deux ternions-unité rectangulaires entre eux change de signe sans changer de valeur quand on intervertit l'ordre des facteurs.* »

Pour le montrer, multiplions par elle-même chacune des équations linéaires vectorielles (1), en observant l'ordre des facteurs, c'est-à-dire, en écrivant toujours le multiplicateur à la droite du multiplicande. En ayant égard aux relations (3) et (8) il restera des équations dont la première sera

$$(9)\quad (ij + ji)\, aa' + (ki + ik)\, a''a + (jk + kj)\, a'a'' = 0.$$

Comme les valeurs a, a', a'' sont arbitraires, il faut que l'on ait séparément

$$(10)\qquad ij + ji = 0, \quad ki + ik = 0, \quad jk + kj = 0.$$

En opérant de la même manière sur les deux autres équations (1) nous obtiendrons les mêmes relations (10) ; ce sont donc les seules relations de cette espèce. Enfin, en opérant de même avec le système (2) nous trouverons également

$$IJ + JI = 0, \quad KI + IK = 0, \quad JK + KJ = 0,$$

qui sont de la même espèce, et comme ce dernier système a une position arbitraire par rapport au premier, on en con-

clut que le théorème a lieu pour toutes les valeurs de deux ternions-unité rectangulaires entre eux.

Pour plus de clareté, décomposons ce théorème en deux parties : 1° on ne peut intervertir l'ordre des deux facteurs sans changer la valeur du résultat ; 2° ce changement ne produit qu'un changement de signe dans la valeur de ce résultat.

Supposons que nous puissions avoir, comme avec les quantités réelles

$$ij = ji, \quad ki = ik, \quad jk = kj,$$

nous aurons alors pour l'équation (9) la valeur

$$2\,(ij\;aa' + ki\;a''a + jk\;a'a'') = o.$$

Les valeurs des a, a', a'', n'étant pas nulles par hypothèse, il faudrait que l'on eut généralement $ij=o$, $ki=o$, $jk=o$, ce qui est impossible, puisqu'aucun des facteurs qui expriment chacun d'eux une valeur de l'unité imaginaire n'est nul, et que le produit de deux verseurs quelconques est nécessairement par définition un troisième verseur qui ferme le triangle sphérique formé par les deux autres. D'un autre côté les valeurs a, a', a'' ne peuvent pas être toutes nulles en même temps, puisqu'elles satisfont à la relation algébrique $a^2+a'^2+a''^2=1$. Si l'on suppose que l'une d'elle est nulle, a'' par exemple, le vecteur $I=ia+ja+ka''$ devient indépendant de la valeur de k, et l'on a simplement $2\,ijaa'=o$; alors a et a' n'étant pas nuls, il faudrait que l'on eut $ij=o$, ce qui est impossible par définition. Reste donc que ij et ji aient des valeurs différentes, et nous retrouvons l'équation (9), et les relations (10) qui sont seules possibles.

Ce théorème, qui est dû à Hamilton, du moins quand à sa conclusion (car la démonstration qu'il en a donnée est purement métaphysique), est le point de départ de tout le calcul algébrique des quantités imaginaires, et l'on voit qu'il est fondé sur la notion des valeurs distinctes de l'unité imagi-

naire $\sqrt{-1}$. Son importance nous servira d'excuse pour la longueur de sa démonstration.

37. Théorème II. — « *Le produit de deux ternions-unité rectangulaires entre eux est le troisième ternion-unité perpendiculaire au plan des deux autres.* »

Pour le montrer multiplions membre à membre et deux à deux les équations (1) en observant toujours le changement de signe résultant de l'interversion des facteurs d'après le théorème précédent, c'est-à-dire, que nous pouvons écrire, d'après les relations (7) et (10),

(11) $ij\,(ab'-a'b) = ijc''$ pour $ijab' + jia'b$, etc.

La partie scalar sera nulle d'après les relations (4) et il reste une partie linéaire ternion, qui donne le système suivant :

$$(12)\left\{\begin{aligned} \mathrm{JK} &= jka + kia' + ija'',\\ \mathrm{KI} &= jkb + kib' + ijb'',\\ \mathrm{IJ} &= jkc + kic' + ijc''; \end{aligned}\right. \quad (13)\left\{\begin{aligned} jk &= \mathrm{JK}a + \mathrm{KI}b + \mathrm{IJ}c,\\ ki &= \mathrm{JK}a' + \mathrm{KI}b' + \mathrm{IJ}c',\\ ij &= \mathrm{JK}a'' + \mathrm{KI}b'' + \mathrm{IJ}c''. \end{aligned}\right.$$

Le système (13) s'obtient de la même manière en faisant le produit deux à deux des équations (2) dans l'ordre indiqué. On en conclut, premièrement que le produit de deux ternions-unité quelconques rectangulaires entre eux est un autre ternion-unité, puisque son scalar est nul; deuxièmement que ce ternion a précisément la même direction que le troisième ternion du même système. On en déduit par comparaison les relations

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned} ij &= k, & ki &= j, & jk &= i,\\ \mathrm{IJ} &= \mathrm{K}, & \mathrm{KI} &= \mathrm{J}, & \mathrm{JK} &= \mathrm{I}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs ces relations ont lieu quelle soit la position relative des systèmes, elles sont donc les seules relations de cette espèce.

Corollaire I. — « *Le produit de trois ternions-unité rectangulaires entre eux est égal à l'unité réelle néga-*

tive ou positive suivant que l'ordre cyclique est direct ou inverse. »

Ainsi on a, par exemple,

$$(15) \qquad ijk = -1 \quad \text{et } kji = 1, \text{ etc.}$$

En effet, puisque $ij=k$, on peut écrire en multipliant les deux membres par k, $ijk=k^2=-1$. De même on a $kj=-i$, et en multipliant les deux membres par i, il vient $kji=-i^2=1$.

Corollaire II. — « *Quand on intervertit l'ordre des facteurs du quotient de deux ternions-unité rectangulaires entre eux, on change seulement le signe du quotient, et le quotient est le troisième ternion du même système.* »

En effet, si nous observons que pour une même valeur de l'unité imaginaire, nous avons les relations réciproques, (n° 20 (12)

$$(16) \qquad \frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{j} = -j, \quad \frac{1}{k} = -k.$$

nous aurons en multipliant chaque membre par un autre ternion différent, en convenant de prendre les numérateurs comme multiplicateurs, et les dénominateurs comme multiplicandes,

$$(17) \qquad \begin{cases} \frac{k}{j} = -i, & \frac{j}{i} = -k, & \frac{i}{k} = -j, \\ \frac{j}{k} = i, & \frac{i}{j} = k, & \frac{k}{i} = j, \end{cases}$$

De là résulte cette remarque importante qu'un rapport tel que

$$(18) \qquad \frac{k}{j} = \frac{1}{j} \times k = -jk$$

est différent du rapport

$$(19) \qquad k \times \frac{1}{j} = \frac{j}{k} = -kj.$$

De sorte qu'intervertir l'ordre des facteurs d'un quotient

de deux ternions-unité rectangulaires équivaut à changer le signe du résultat, c'est donc la même règle que pour un produit. De là la nécessité de préciser l'algorithme de la division et de distinguer l'opération $\frac{i}{\diagdown j}$ de l'opération $\frac{i}{\diagup j}$. D'ailleurs pour éviter toute confusion quand il s'agit du rapport de plusieurs facteurs ternions, il suffira d'écrire un facteur au dénominateur sous la forme d'un numérateur affecté de la puissance—1, en écrivant, par exemple, j^{-1} au lieu de $\frac{1}{j}$, et de lui conserver son ordre, en observant que l'on a $j\,j^{-1} = 1$. Une seconde observation, c'est qu'il faut distinguer une sommation vectorielle d'une sommation versorielle. Dans la première le coefficient numérique est un scalar qui a la direction de son ternion-unité facteur ; tandis que dans la seconde le coefficient numérique est un angle qui a la direction du plan perpendiculaire à la direction de son ternion unité facteur. Dans le premier cas on a une addition algébrique d'exponentielles, et dans le second cas une multiplication, et par suite une addition des exposants. Ainsi, par exemple, puisque $i = e^{\frac{\pi}{2} i}$, etc. ; il en résulte que l'on peut écrire $ijk = e^{\frac{\pi}{2}(i + j + k)} = -1$, et $kji = e^{\frac{\pi}{2}(k + j + i)} = 1$, d'où l'équation versorielle $\frac{\pi}{2}(k + j + i) = o$, que l'on pourrait prendre pour une addition vectorielle si l'on supprimait le facteur angulaire commun $\frac{\pi}{2}$, et qui exprime une addition d'arcs de 90° sur la sphère-unité. En effet, les i, j, k, n'expriment par eux-mêmes qu'une opération de direction, sans grandeur numérique autre que le coefficient numérique réel ou modulaire qui les accompagnent. Comme addition vectorielle, l'équation

$i + j + k = o$, n'a pas de sens analytique ou est impossible. Car soit que l'on suppose les vecteurs-unités i, j, k, comme coinitiaux, soit qu'on veuille les additionner vectoriellement, en leur donnant pour scalar l'unité réelle ± 1, il est évident que la diagonale du cube ainsi formée ne peut être nulle, à moins que chacun des côtés ne soient nuls séparément. D'un autre côté, ils ne peuvent pas être tous nuls à la fois, donc l'équation vectorielle $i + j + k = o$ est fausse. Il est facile de voir que sa vraie valeur est $i+j+k = \sqrt{3}\ \mathrm{I}$, où I est la direction de la diagonale du cube-unité. Mais quand il s'agit d'une équation versorielle, l'équation $\frac{\pi}{2}(i+j+k) = o$, donne sans ambiguité la position des huit triangles suivant les permutations de l'ordre et du signe des termes (n° 28).

Remarque — Un ternion-unité pouvant toujours être considéré comme le produit par facteur ou par quotient de deux autres ternions-unités rectangulaires dans son plan verseur, il en résulte que facteur scalar exprime le cosinus de la perpendiculaire au plan des deux autres, et l'on a par exemple

$$\mathrm{I} = i\,(b'c'' - b''c) + j\,(b''c - bc'' + k\,(bc' - b'c). \tag{21}$$

On en conclut qu'un ternion peut toujours s'écrire sous la forme d'un déterminant, tel que

$$\mathrm{I} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = (i\ b'\ c'),\ \text{etc.} \tag{22}$$

sous cette forme le calcul analytique des quantités imaginaires prend une forme symétrique très propre aux substitutions linéaires.

38. — Théorème III. — « *Trois ternions-unité trirectangulaires ont respectivement pour verseur le produit des verseurs des deux autres ternions.* »

Ce théorème, qui au fond est identique au théorème précédent, a été démontré directement par Hamilton. Il suffit d'observer que les trois verseurs quadrants forment sur la sphère unité un triangle sphérique trirectangle, et que chacun de ces verseurs est respectivement perpendiculaire à chacun des ternions-unité correspondant. Or comme multiplier un verseur par un autre, consiste à faire tourner le second autour de l'axe ternion du premier d'un angle égal à son argument, on aura en faisant tourner i autour de k, la valeur de j ; c'est-à-dire que cette opération change i en j ; une nouvelle rotation de j autour de i change j en k, et enfin, une rotation de k autour de j change k en i, et ramène au point de départ. Il en résulte que chacun des arcs verseurs décrits est celui qui a pour ternion-unité le troisième ternion du système trirectangulaire.

Cette identité d'un verseur-quadrant et du ternion-unité qui exprime son axe, permet d'exprimer un arc circulaire réel par une quantité imaginaire, et réciproquement. Autrement dit : une valeur quelconque de l'unité imaginaire exprime une valeur réelle d'un arc circulaire quadrant ; ce qui montre que la véritable nature de l'opération $\sqrt{-1}$, est une exponentielle linéaire et n'est plus algébrique, mais transandante et périodique circulaire.

§ II. — Verseurs quadrants obliques

39. *Formules d'un système oblique.* — Nous désignerons désormais par (I, J, K) un système de trois ternions-unité, formant un trièdre oblique quelconque, et nous réserverons la notation (i, j, k) pour un trièdre-trirectangle. Posons

$$(23)\quad \begin{cases} \mathrm{I} = ia + ja' + ka'', \\ \mathrm{J} = ib + jb' + kb'', \\ \mathrm{K} = ic + jc' + kc''. \end{cases}$$

les 9 quantités réelles (a^i, b^i, c^i) étant des projections orthogonales sont toujours les cosinus des angles que forment respectivement chacun des vecteurs I, J, K, avec les vecteurs (i, j, k) et qui assignent leurs positions relatives. Mais leur déterminant n'est plus l'unité positive, ni réciproque du déterminant des mineurs. Sa valeur $\Delta = (a\,b'\,c'')$ s'appelle le sinus-trièdre des axes obliques et le déterminant des mineurs donne $(a\,b'\,c'') = \Delta^2$, en posant pour abréger

$$(24)\quad \begin{cases} A = b'c'' - b''c', & B = c'a'' - c''a', & C = a'b'' - a''b', \\ A' = b''c - bc'', & B' = c''a' - ca'', & C' = a''b - ab'', \\ A'' = bc' - b'c, & B'' = ca' - c'a, & C'' = ab' - a'b. \end{cases}$$

40. Théorème I. — « *Le produit de deux ternions-unité obliques entre eux est un verseur-quaternion dont le ternion-unité est perpendiculaire à leur plan, et dont l'argument est l'angle compris entre les deux verseurs-quadrant donnés.* »

Réciproquement « *Tout verseur-quaternion est le produit des deux ternions-unité qui le limitent.* »

Ces verseurs ternions peuvent d'ailleurs prendre une position quelconque dans leur plan commun, ou dans tout autre plan parallèle, puisque l'axe et l'argument conservent la même valeur et par suite le verseur-quaternion ne change pas de valeur.

Si donc nous multiplions les équations (23) deux à deux et membre à membre, en ayant égard aux notations (24), nous aurons une partie réelle scalar donnée par les relations algébriques suivantes :

$$(25)\quad \begin{cases} bc + b'c' + b''c'' = \cos\omega, \\ ca + c'a' + c''a'' = \cos\omega', \\ ab + a'b' + a''b'' = \cos\omega''. \end{cases}$$

et une partie ternion, donnée par les relations

$$(26)\quad \begin{cases} iA + jA' + kA'' = \mathbf{I}\sin\omega, \\ iB + jB' + kB'' = \mathbf{J}\sin\omega', \\ iC + jC' + kC'' = \mathbf{K}\sin\omega''. \end{cases}$$

Donc nous aurons

$$(27)\quad \begin{cases} JK = -\cos\omega + \mathbf{I}\sin\omega = -e^{-\mathbf{I}\omega}, \\ KI = -\cos\omega' + \mathbf{J}\sin\omega' = -e^{-\mathbf{J}\omega'}, \\ IJ = -\cos\omega'' + \mathbf{K}\sin\omega'' = -e^{-\mathbf{K}\omega''}. \end{cases}$$

41. *Trièdre polaire conjugué.* — Les angles ω, ω', ω'' expriment les arguments compris entre les deux ternions facteurs et le signe — du scalar qui provient d'ailleurs de la propriété fondamentale des valeurs de l'unité imaginaire, $(\sqrt{-1})^2 = -1$ est aussi une conséquence géométrique provenant de ce que l'angle des plans verseurs est supplémentaire de l'angle de leurs normales, ou de leurs ternions respectifs, quand ceux-ci sont de même signe, et égal à leur angle quand ils sont de signes contraires.

Les ternions-unité (**I**, **J**, **K**) forment un nouveau trièdre conjugué polaire du proposé, de telle sorte que, chacun d'eux étant perpendiculaire au plan de deux vecteurs du système (I, J, K), réciproquement les (I, J, K) sont perpendiculaires au plan de deux vecteurs du système (**I**, **J**, **K**).

En effet, si nous désignons par (ε, ε', ε'') les angles des faces du second trièdre, nous aurons de la même manière

$$(28)\quad \begin{cases} \mathbf{JK} = -\cos\varepsilon + I\sin\varepsilon = -e^{-I\varepsilon}, \\ \mathbf{KJ} = -\cos\varepsilon' + J\sin\varepsilon' = -e^{-J\varepsilon'}, \\ \mathbf{IJ} = -\cos\varepsilon'' + K\sin\varepsilon'' = -e^{-K\varepsilon''}. \end{cases}$$

Pour le montrer, faisons directement le carré et le produit des équations (26), nous aurons pour la partie scalar les formules suivantes :

$$(29)\left\{\begin{array}{l} A^2+A'^2+A''^2=\sin^2\omega, \\ B^2+B'^2+B''^2=\sin^2\omega', \\ C^2+C'^2+C''^2=\sin^2\omega''; \end{array}\right. \quad (30)\left\{\begin{array}{l} BC+B'C'+B''C''=\pi, \\ CA+C'A'+C''A''=\pi', \\ AB+A'B'+A''B''=\pi''; \end{array}\right.$$

en posant pour abréger

$$(31)\left\{\begin{array}{l} \pi \;=\cos\omega' \cos\omega''-\cos\omega \;=\sin\omega' \sin\omega'' \cos\varepsilon, \\ \pi' =\cos\omega'' \cos\omega \;-\cos\omega' =\sin\omega'' \sin\omega \;\cos\varepsilon', \\ \pi'' =\cos\omega \;\cos\omega' -\cos\omega'' =\sin\omega \;\sin\omega' \cos\varepsilon''. \end{array}\right.$$

Puis nous aurons pour la partie ternion, qui se réduit par la théorie des déterminants aux quantités suivantes

$$(32)\left\{\begin{array}{l} i\,(B'C''-B''C')+j\,(B''C-BC'')+k\,(BC'-B'C)=\Delta I, \\ i\,(C'A''-C''A')+j\,(C''A-CA'')+k\,(CA'-C'A)=\Delta J, \\ i\,(A'B''-A''B')+j\,(A''B-AB'')+k\,(AB'-A'B)=\Delta K, \end{array}\right.$$

et nous aurons d'abord les expressions

$$(33)\left\{\begin{array}{l} \mathbf{JK} \sin\omega' \;\sin\omega''=-\pi \;+I\;\Delta, \\ \mathbf{KJ} \sin\omega'' \sin\omega \;=-\pi' +J\;\Delta, \\ \mathbf{IJ} \sin\omega \;\sin\omega' \;=-\pi'' +K\,\Delta, \end{array}\right.$$

enfin, en ayant égard aux relations suivantes de la théorie des trièdres

$$(34)\qquad \Delta=\sin\omega \sin\omega' \sin\varepsilon''=\sin\omega'' \sin\omega \sin\varepsilon'= \\ =\sin\omega'' \sin\omega \sin\varepsilon'',$$

nous aurons, en supprimant les facteurs communs $\sin\omega^i \sin\omega^j$, les équations (28), qui montrent que le trièdre proposé (I, J, K) est bien le polaire conjugué du trièdre (**I, J, K**).

Comme nous l'avons montré, nous pouvons écrire les formules (26) et (32) sous forme de déterminant, tels que

$$(35)\left\{\begin{array}{lll} \Delta I=(i\,B'C''), & \Delta J=(i\,C'A''), & \Delta K=(i\,A'B'') \\ \mathbf{I}\sin\omega=(i\,b'c''), & \mathbf{J}\sin\omega'=(i\,c'a''), & \mathbf{K}\sin\omega''=(i\,a'b'') \end{array}\right.$$

Remarque. — Les angles dièdres des verseurs, que l'on prend pour les angles intérieurs du trièdre oblique formé par les directions positives des (I, J, K) sont supplémentaires des angles des directions **I**, **J**, **K** entre elles, ou des

arguments respectifs de leurs produits deux à deux. Si donc du sommet d'un trièdre quelconque on élève une perpendiculaire sur chaque face du trièdre et du même coté de ce plan que la troisième arête, on forme un trièdre supplémentaire du premier, qui est le trièdre *autopolaire*. En effet si l'on opère sur ce trièdre de la même manière que sur le premier, on obtient pour son trièdre polaire précisément le trièdre primitif, et l'on dit qu'ils sont conjugués polaires ; c'est ce que nous enseigne la géométrie élémentaire. Mais quand il s'agit de verseurs quelconques, cette définition doit être généralisée en tenant compte du signe de l'axe ternion et du signe de l'argument. Il peut arriver que les axes du trièdre conjugué du proposé soient situés tous trois au-dessous du plan des faces par rapport à la troisième arête, et les deux trièdres sont opposés ; les angles de l'un sont respectivement égaux aux angles de l'autre. Enfin il peut arriver qu'un ou deux axes du trièdre conjugué laissent le trièdre proposé au-dessous de leurs plans, ou bien que deux ou un des axes se trouvent au-dessus par rapport à la troisième arête. Or il est facile de voir que tous ces différents cas tiennent aux signes que peuvent prendre les arguments et les axes ternions d'un verseur quaternion. L'opération algébrique du produit de deux verseurs quelconques est donc générale et donne sans ambiguité la valeur et la position du troisième verseur.

Ainsi à tout trièdre oblique quelconque répond nécessairement un autre trièdre oblique qui est le conjugué polaire ; quand le trièdre proposé devient trirectangulaire son conjugué coincide avec lui. C'est une conséquence de la règle $ij=k$, et par suite $IJ = K = k$. Si donc on voulait étudier la position relative de deux trièdres quelconques (I, J, K) et (I_1, J_1, K_1) non conjugués, il en résulterait nécessairement un système de deux autres trièdres conjugués polaires (**I, J, K**,) et (**I_1, J_1, K_1**). Si l'on rapporte chacun d'eux à un

système fixe coordonné (i, j, k), on obtiendra pour chaque système des relations semblables à celles que nous avons définies. En éliminant les (i, j, k) on obtiendra les relations demandées sous formes symétriques, comme nous le développons plus loin.

42. Théorème II. — « *Quand on intervertit l'ordre des facteurs du produit de deux ternions obliques, on obtient le verseur quaternion conjugué.* »

C'est-à-dire, que le scalar du produit reste le même, tandis que le ternion change de signe sans changer d'argument. Cela résulte immédiatement du théorème I (34) du produit de deux ternions rectangulaires, savoir $ij = -ji$, puisque l'on effectue la multiplication dans un ordre inverse. On a donc

$$(36)\quad IJ = -\cos\omega'' + \mathbf{K}\sin\omega'', \quad JI = -\cos\omega'' - \mathbf{K}\sin\omega''.$$

On en déduit des relations algébriques importantes dans le calcul des quaternions, savoir :

$$(37)\quad \begin{cases} IJ + JI = 2\,S\,(IJ) = -2\cos\omega'' = 2\,S\,(JI), \\ IJ - JI = 2\,T\,(IJ) = -2\,R\sin\omega'' = -2\,T\,(JI), \\ (IJ)\,(JI) = I\,(JJ)\,I = 1\,; \end{cases}$$

d'où

$$(38)\quad \begin{cases} S\,(IJ) = S\,(JI), \\ T\,(IJ) = -T\,(JI). \end{cases}$$

L'on voit que dans le produit, comme dans le rapport de deux verseurs-quadrants quelconques, le résultat dépend à la fois de l'ordre des facteurs et de leurs signes. Ainsi, à chacun des angles au pôle **K** répondent quatre verseurs ayant même valeur de l'argument et du ternion-unité, mais avec des signes différents. Ils répondent aux quatre valeurs

$$(39)\quad IJ = -e^{-\mathbf{K}\omega''}, \; -IJ = e^{-\mathbf{K}\omega''}, \; JI = -e^{\mathbf{K}\omega'}, \; -JI = e^{\mathbf{K}\omega''}.$$

La règle algébrique est donc générale et comprend tous les cas.

Corollaire. — On déduit immédiatement la valeur du quotient de deux verseurs-quadrants quelconques en appliquant la relation fondamentale $\sqrt{-1} = -\frac{1}{\sqrt{-1}}$ pour une même valeur de l'unité imaginaire dans les deux membres. En se reportant à l'observation sur la généralisation de l'algorithme de la division, on trouvera

$$
(40)\quad
\begin{cases}
{}^{K}\!/_{J} = {}_{K}\backslash^{J} = -KJ = \cos\omega + \mathbf{I}\sin\omega = e^{\mathbf{I}\omega}, \\
{}^{I}\!/_{K} = {}_{I}\backslash^{K} = -IK = \cos\omega' + \mathbf{J}\sin\omega' = e^{\mathbf{J}\omega'}, \\
{}^{J}\!/_{I} = {}_{J}\backslash^{I} = -JI = \cos\omega'' + \mathbf{K}\sin\omega'' = e^{\mathbf{K}\omega'}; \\
\\
{}^{J}\!/_{K} = {}_{J}\backslash^{K} = -JK = \cos\omega - \mathbf{I}\sin\omega = e^{-\mathbf{I}\omega}, \\
{}^{K}\!/_{I} = {}_{K}\backslash^{I} = -KI = \cos\omega' - \mathbf{J}\sin\omega' = e^{-\mathbf{J}\omega'}, \\
{}^{I}\!/_{J} = {}_{I}\backslash^{J} = -IJ = \cos\omega'' - \mathbf{K}\sin\omega'' = e^{-\mathbf{K}\omega''}.
\end{cases}
$$

43. *Composantes vectorielles obliques.* — On peut demander d'exprimer les vecteurs ternions d'un système oblique, en fonction des composantes parallèles à son trièdre conjugué et réciproquement ; ainsi que les composantes des (i, j, k) en fonction des composantes parallèles aux deux trièdres obliques (I J K) et (**I J K**). La transformation linéaire y conduit directement.

Soient d'abord les expressions des (i, j, k) rectangulaires. En résolvant, comme à l'ordinaire les équations linéaires (23) et (26) par rapport aux i, j, k, nous trouverons les systèmes inverses ;

$$
(41)\quad
\begin{cases}
\Delta i = IA + JB + KC, \\
\Delta j = IA' + JB' + KC', \\
\Delta k = IA'' + JB'' + KC'',
\end{cases}
$$

que nous pouvons mettre sous la forme de déterminants en remettant les binômes des moments composants, savoir :

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\, i = \mathbf{I}\, a \ \sin\omega + \mathbf{J}\, b \ \sin\omega' + \mathbf{K}\, c \ \sin\omega'', \\ \Delta\, j = \mathbf{I}\, a' \ \sin\omega + \mathbf{J}\, b' \ \sin\omega' + \mathbf{K}\, c' \sin\omega'', \\ \Delta\, k = \mathbf{I}\, a'' \sin\omega + \mathbf{J}\, b'' \sin\omega'' + \mathbf{K}\, c'' \sin\omega''; \end{array}\right.$$

$$\Delta i = \begin{vmatrix} I & J & K \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta j = \begin{vmatrix} I & J & K \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad \Delta k = \begin{vmatrix} I & J & K \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} i = \begin{vmatrix} \mathbf{I} \sin\omega & \mathbf{J} \sin\omega' & \mathbf{K} \sin '' \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}, \quad j = \begin{vmatrix} \mathbf{I} \sin\omega & \mathbf{J} \sin\omega' & \mathbf{K} \sin '' \\ A'' & B'' & C'' \\ A & B & C \end{vmatrix}, \\ k = \begin{vmatrix} \mathbf{I} \sin\omega & \mathbf{J} \sin\omega' & \mathbf{K} \sin\omega'' \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}. \end{array}\right.$$

Soient maintenant les composantes des (I, J, K) en fonction des (**I**, **J**, **K**) et vice versà. Il suffira de substituer dans les équations (26) les valeurs des (41) ou ce qui revient au même d'ajouter ces équations (41) respectivement multipliées une première fois par A, A′, A″, une seconde fois par B, B′, B″, et enfin une troisième fois par C, C′, C″, ce qui donne.

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\ \mathbf{I}\ \sin\omega \ = \mathrm{I} \sin^2\omega + \mathrm{J}\,\pi'' \quad + \mathrm{K}\,\pi' \\ \Delta\ \mathbf{J}\ \sin\omega' = \mathrm{I}\,\pi'' \quad + \mathrm{J} \sin^2\omega' + \mathrm{K}\,\pi, \\ \Delta\,\mathbf{K} \sin\omega'' = \mathrm{I}\,\pi' \quad + \mathrm{J}\,\pi \quad + \mathrm{K} \sin^2\omega'' \end{array}\right.$$

ou bien sous la forme de déterminants.

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta \mathbf{I} \sin\omega = \begin{vmatrix} I & J & K \\ \cos\omega'' & 1 & \cos\omega \\ \cos\omega' & \cos\omega & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta \mathbf{J} \sin\omega' = \begin{vmatrix} I & J & K \\ \cos\omega' & \cos\omega & 1 \\ 1 & \cos\omega'' & \cos\omega' \end{vmatrix}, \\ \Delta\,\mathbf{K} \sin\omega'' = \begin{vmatrix} I & J & K \\ 1 & \cos\omega'' & \cos\omega' \\ \cos\omega'' & 1 & \cos\omega \end{vmatrix}. \end{array}\right.$$

Nous pouvons aussi les écrire sous la forme

$$(43^{\text{bis}})\begin{cases}\Delta\ \mathbf{J} = \mathrm{I}\sin\omega + \mathrm{J}\sin\omega'\cos\epsilon'' + \mathrm{K}\sin\omega''\cos\epsilon',\\ \Delta\ \mathbf{I} = \mathrm{I}\sin\omega\cos\epsilon'' + \mathrm{J}\sin\omega' + \mathrm{K}\sin\omega''\cos\epsilon,\\ \Delta\ \mathbf{K} = \mathrm{I}\sin\omega\cos\epsilon' + \mathrm{J}\sin\omega'\cos\epsilon + \mathrm{K}\sin\omega''.\end{cases}$$

Enfin, les équations (42) ajoutées après les avoir respectivement multipliées, une première fois par a, a', a'', une seconde fois par b, b', b'', et enfin une troisième fois par c, c', c'', on aura

$$(44)\begin{cases}\Delta\ \mathbf{I} = \mathrm{I}\sin\omega + \mathrm{J}\sin\omega'\cos\omega'' + \mathrm{K}\sin\omega''\cos\omega',\\ \Delta\ \mathbf{J} = \mathrm{I}\sin\omega\cos\omega'' + \mathrm{J}\sin\omega' + \mathrm{K}\sin\omega''\cos\omega,\\ \Delta\ \mathbf{K} = \mathrm{I}\sin\omega\cos\omega' + \mathrm{J}\sin\omega'\cos\omega + \mathrm{K}\sin\omega''.\end{cases}$$

Nous pourrions obtenir d'autres formes en employant le sinus-triedre Δ' du conjugué polaire. Parmi ces équations les plus importantes sont les formules (43) et (44), qui permettent d'exprimer les composantes d'un trièdre en fonctions des composantes parallèles aux directions du trièdre conjugué polaire.

44. Théorème III. — « *Un verseur quaternion quelconque s'exprime par une puissance de son verseur quadrant.* »

Nous avons déjà posé pour l'expression d'un verseur les formules suivantes

$$(45)\qquad \mathrm{U} = \cos\theta + \mathrm{I}\sin\theta = e^{\theta\mathrm{I}} = \mathrm{I}^{\frac{2}{\pi}\theta},$$

comme le résultat du développement de l'exponentielle linéaire ternion et la séparation des parties réelles et imaginaires. Ces formules résultent également de la formule de Moivre, car si nous posons $\theta = m\alpha$, nous aurons

$$(46)\qquad \mathrm{U} = \cos m\alpha + \mathrm{I}\sin m\alpha = (\cos\alpha + \mathrm{I}\sin\alpha)^m;$$

le premier membre exprime un verseur qui produit une rotation d'un angle $m\alpha$ autour de l'axe ternion I, tandis que

le second membre exprime m rotations successives d'un angle α autour du même axe et le résultat est évidemment le même.

Si nous posons $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la formule de Moivre prend la forme

$$\cos \frac{\pi}{2} m + I \sin \frac{\pi}{2} m = I^m,$$

et exprime un verseur qui opère une rotation de m angles droits et suivant que m sera entier ou fractionnaire, on aura un verseur-quadrant ou un verseur quaternion ; dans le premier cas toutes les puissances paires donneront l'unité scalar ± 1, et toutes les puissances impaires donneront l'unité ternion $\pm I$, de sorte qu'en donnant à m toutes les valeurs consécutives (0, 1, 2, 3... m) on reproduira continuellement la période (1, I, — 1, — I).

Dans le second cas, où m est fractionnaire, on pourra trouver un arc $\theta = \frac{\pi}{2} m$, et θ sera l'argument du verseur.

Dans le cas où m est incommensurable, l'arc sera indéterminé, mais on pourra toujours en trouver une valeur approchée en plus ou en moins, et la formule subsiste toujours. Mais si m est périodique on a une nouvelle fonction hyperciculaire, à moins que m ne soit de la forme $p + I q$, p et q étant des nombres rationnels et I étant le même dans la base et l'exposant (Ch. II, 32).

45. Théorème IV. — « *Le produit de trois ternions-unité obliques est un verseur quaternion défini, et en général celui de m ternions-unité quelconques est un verseur quaternion défini.* »

En effet, puisque le produit de deux verseurs quadrants est le verseur qui ferme le triangle sphérique biquadrant formé par ces deux verseurs, le produit de ce dernier verseur-quaternion par un nouveau verseur-quadrant est le

verseur qui ferme le triangle sphérique formé par les deux verseurs facteurs, et ainsi de suite de proche en proche.

Pour obtenir l'expression du produit de verseurs quadrants I, J, K, formant le trièdre (I J K), nous pouvons exécuter directement leur produit dans l'ordre indiqué. Or, nous avons déjà trouvé pour le produit des deux premiers verseurs, le verseur défini

$$\mathrm{IJ} = -\cos\omega'' + \mathbf{K}\sin\omega''.$$

Si nous multiplions les deux membres par k, ou mieux par Δk, et si nous substituons dans le second membre sa valeur tirée des formules (43), en fonction linéaire des (S, J, B) nous aurons

$$\Delta\,\mathrm{IJK} = -\Delta\,\mathrm{K}\cos\omega'' + \mathrm{K}\sin\omega''\,(\mathbf{I}\sin\omega''\cos\omega' + \mathbf{J}\sin\omega'\cos\omega + \mathbf{K}\sin\omega''),$$

et d'après les formules (28), en observant les changements de signes dans l'ordre des facteurs nous aurons

$$\Delta\,\mathrm{IJK} = -(\sin^2\omega'' + \pi''\cos\omega' + \pi\cos\omega) - \Delta\,(\mathrm{I}\cos\omega - \mathrm{J}\cos\omega' + \mathrm{K}\cos\omega''),$$

et en supprimant le facteur commun Δ, dans les deux membres, il reste

$$(47)\qquad \mathrm{IJK} = -\Delta - \mathrm{I}\cos\omega + \mathrm{J}\cos\omega' - \mathrm{K}\cos\omega''.$$

De sorte que la partie scalar est égale au déterminant des trois facteurs, ou au sinus-trièdre de ces facteurs, savoir :

$$(48)\qquad \mathrm{S}\,(\mathrm{IJK}) = -\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C}, \text{ etc.}$$

Quelque soit l'ordre de la permutation des facteurs, on voit facilement que le scalar ne change pas de valeur, mais seulement de signe pour une permutation impaire ou non-circulaire.

Quand au ternion, il suffira de maintenir l'alternance $- + -$, et l'on trouvera par exemple.

(49) $\quad T(JIK) = - J \cos\omega' + I \cos\omega - K \cos\omega''$, etc.

On voit que les termes extrêmes étant de même signe, on peut les échanger entre eux, c'est-à-dire, que l'on aura, sauf l'ordre des termes,

$$T(JIK) = T(KIJ), \text{ etc.}$$

Corollaire I. — Si l'on prend le troisième facteur égal au premier, nous aurons des formules telles que les suivantes :

$$(50) \left\{\begin{array}{l} IKI = K - 2\, I \cos\omega', \\ JKJ = K - 2\, J \cos\omega. \\ \text{etc.,} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} IKI^{-1} = - K + 2\, I \cos\omega', \\ JKJ^{-1} = - K + 2\, J \cos\omega, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

On a donc $\qquad IKI = - IKI^{-1}$,

ce qui doit être, puisque l'on a $\quad I = - I^{-1}$.

Ces formules seront utiles pour exprimer une rotation conique. D'ailleurs le déterminant Δ devient nul, comme ayant deux lignes ou deux colonnes identiques, ce qui exprime que le ternion résultant est dans le plan des deux ternions des facteurs.

Si k devient perpendiculaire à I ou à J, l'argument disparaît et l'on retrouve les formules relatives aux verseurs-quadrants rectangulaires.

Corollaire II. — Le produit de m verseurs-quadrants consécutifs, I J K L..., se ramène au produit (I J) (K L)... de $\frac{m}{2}$ verseurs quaternions successifs, ou à $\frac{m-1}{2}$ verseurs quaternions par un même verseur-quadrant, suivant que m est pair ou impair. On pourra avoir ainsi le produit d'un nombre quelconque de ternions-unité, dans un ordre donné.

§ III. — Trièdres non conjugués

46. *Systèmes trirectangulaires.* — Nous avons considéré jusqu'ici le produit des verseurs appartenant à un même trièdre, et nous avons vu qu'à chaque trièdre, et plus généralement à toute pyramide de vecteurs ternions-unité correspond un trièdre polaire ou plus généralement une pyramide conjuguée polaire de la proposée. Mais quand on considère deux trièdres, donnés en position relative (i, j, k) et (I, J, K), ces deux trièdres ne sont pas les seuls que l'on peut considérer ; car en prenant deux ou une des directions du premier avec une ou deux directions du second, on aura autant de nouveaux trièdres, dont les verseurs sont déterminés. Mais ce n'est pas tout encore ; si les trièdres donnés sont obliques, à chacun d'eux répond un trièdre polaire conjugué et l'on pourra former de nouvelles combinaisons de trièdres non conjugués. Chacune de ces combinaisons est définie algébriquement par le calcul vectoriel sans ambiguité.

Considérons d'abord deux trièdres trirectangulaires donnés en position relative. Il suffira de se reporter aux formules (1) et (2) de ce chapitre et de substituer la valeur de l'un des facteurs en fonction linéaire de l'autre système, et nous trouverons immédiatement les formules suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} i\,I = -a + ka' - ja'' = -a + Jc - Kb, \\ i\,J = -b + kb' - jb'' = -b + Ka - Ic, \\ iK = -c + kc' - jc'' = -c + Ib - Ja ; \\ j\,I = -a' + ia'' - ka = -a' + Jc' - Kb', \\ j\,J = -b' + ib'' - kb = -b' + Ka' - Ic', \\ jK = -c' + ic'' - kc = -c' + Ib' - Ja' ; \\ k\,I = -a'' + ja - ia' = -a'' + Jc'' - Kb'', \\ k\,J = -b'' + jb - ib' = -b'' + Ka'' - Ic'', \\ kK = -c'' + jc - ic' = -c'' + Ib'' - Ja''. \end{cases}$$

On voit que les neuf cosinus $(a, b, c\ldots)$ sont les scalars du produit de deux vecteurs pris dans chacun des systèmes, et que les ternions sont dans le plan verseur communs à ces deux facteurs. Cela est évident, puisque la direction de ce ternion est la ligne d'intersection des deux plans verseurs des facteurs qu'on appelle aussi ligne des nœuds, et ces 9 intersections jointes aux 6 directions données $(i, j, k, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ donnent les 18 intersections des plans deux à deux.

47. *Cas où l'un des systèmes est oblique.* — Les projections orthogonales où les scalars seront toujours les neuf cosinus $(a, b, c\ldots)$, qui assignent la position relative des deux trièdres et donneront d'après la théorie des déterminants :

$$
\left\{\begin{aligned}
\Delta a &= B'C'' - B''C' = A + B\cos\omega'' + C\cos\omega',\\
\Delta a' &= B''C - BC'' = A' + B'\cos\omega'' + C'\cos\omega',\\
\Delta a'' &= BC' - B'C = A'' + B''\cos\omega'' + C''\cos\omega';
\end{aligned}\right.
$$

$$
(2)\quad\left\{\begin{aligned}
\Delta b &= C'A'' - C''A' = A\cos\omega'' + B + C\cos\omega,\\
\Delta b' &= C''A - CA'' = A'\cos\omega'' + B' + C'\cos\omega,\\
\Delta b'' &= CA' - C'A = A''\cos\omega'' + B'' + C''\cos\omega;
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
\Delta c &= A'B'' - A''B' = A\cos\omega' + B\cos\omega + C,\\
\Delta c' &= A''B - AB'' = A'\cos\omega' + B'\cos\omega + C',\\
\Delta c'' &= AB' - A'B = A''\cos\omega' + B''\cos\omega + C''.
\end{aligned}\right.
$$

Si nous multiplions les équations (41), qui expriment les composantes des i, j, k, en fonction linéaire des $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, on obtiendra les valeurs des produits $\mathbf{I}i$, etc., deux à deux, et nous aurons.

$$
\left\{\begin{aligned}
i\mathbf{I} &= -a + C\,\mathbf{J}\sin\omega' - B\,\mathbf{K}\sin\omega'',\\
i\mathbf{J} &= -b + A\,\mathbf{K}\sin\omega'' - C\,\mathbf{I}\sin\omega,\\
i\mathbf{K} &= -c + B\,\mathbf{I}\sin\omega - A\,\mathbf{J}\sin\omega';
\end{aligned}\right.
$$

$$
(3)\quad\left\{\begin{aligned}
j\mathbf{I} &= -a' + C'\,\mathbf{J}\sin\omega' - B'\,\mathbf{K}\sin\omega'',\\
j\mathbf{J} &= -b' + A'\,\mathbf{K}\sin\omega'' - C'\,\mathbf{I}\sin\omega,\\
j\mathbf{K} &= -c' + B'\,\mathbf{I}\sin\omega - A'\,\mathbf{J}\sin\omega';
\end{aligned}\right.
$$

$$(3)\quad \begin{cases} k\,\mathrm{I} = -\,a'' + \mathrm{C}''\,\mathbf{J}\sin\omega' - \mathrm{B}''\mathbf{K}\sin\omega'' \\ k\,\mathrm{J} = -\,b'' + \mathrm{A}''\mathbf{K}\sin\omega'' - \mathrm{C}''\,\mathbf{I}\sin\omega, \\ k\mathrm{K} = -\,c'' + \mathrm{B}''\,\mathbf{I}\sin\omega - \mathrm{A}''\,\mathbf{J}\sin\omega'. \end{cases}$$

Enfin si l'on voulait avoir les iJ, etc. du trièdre polaire, il suffirait de remplacer dans les équations précédentes les petites lettres par les grandes lettres et vice-versà.

48. *Produits des vecteurs des systèmes polaires.* — Nous pouvons encore trouver directement les valeurs des quaternions **II**, **IJ**, **IK**... etc., en observant que les trois produits **II**, **JJ**, **KK**, sont seuls des verseurs quaternions, tandis que pour les six autres, étant le produit de deux ternions rectangulaires entr'eux, leur scalar est nul.

Si donc nous prenons les équations (42) ou les équations (44) en multipliant les secondes respectivement par **I** sinω, **J** sinω', **K** sinω'', et les premiers par I, J, K, nous obtiendrons les valeurs cherchées.

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{I}\,\mathbf{I}\sin\omega = -\,\Delta + \mathbf{K}\,\pi''\sin\omega'' - \mathbf{J}\,\pi'\sin\omega' \\ \qquad = -\,\Delta + \mathrm{J}\cos\omega' - \mathrm{K}\cos\omega'', \\ \mathrm{I}\,\mathbf{J}\sin\omega' = +\,\mathbf{K}\sin^2\omega\sin\omega'' - \mathbf{J}\,\pi\sin\omega' \\ \qquad = +\,\mathrm{K} - \mathrm{I}\cos\omega', \\ \mathrm{I}\mathbf{K}\sin\omega'' = +\,\mathbf{K}\,\pi\sin\omega'' - \mathbf{J}\sin^2\omega''\sin\omega' \\ \qquad = +\,\mathrm{I}\cos\omega' - \mathrm{J}; \\ \mathrm{J}\,\mathbf{I}\sin\omega = +\,\mathbf{I}\,\pi'\sin\omega - \mathbf{K}\sin^2\omega\sin\omega'' \\ \qquad = +\,\mathrm{J}\cos\omega'' - \mathrm{K}, \\ \mathrm{J}\,\mathbf{J}\sin\omega' = -\,\Delta + \mathbf{I}\,\pi\sin\omega - \mathbf{K}\,\pi''\sin\omega'' \\ \qquad = -\,\Delta + \mathrm{K}\cos\omega'' - \mathrm{I}\cos\omega, \\ \mathrm{J}\mathbf{K}\sin\omega'' = +\,\mathbf{I}\sin\omega''\sin\omega'' - \mathbf{K}\,\pi'\sin\omega'' \\ \qquad = +\,\mathrm{I} - \mathrm{I}\cos\omega''; \\ \mathbf{K}\,\mathbf{I}\sin\omega = +\,\mathbf{J}\sin^2\sin\omega' - \mathbf{I}\,\pi''\sin\omega \\ \qquad = +\,\mathrm{J} - \mathrm{K}\cos\omega, \\ \mathrm{K}\,\mathbf{J}\sin\omega' = +\,\mathbf{J}\,\pi''\sin\omega' - \mathbf{I}\,\pi'\sin\omega \\ \qquad = +\,\mathrm{K}\cos\omega' - \mathrm{I}, \\ \mathbf{KK}\sin\omega'' = -\,\Delta + \mathbf{J}\,\pi'\sin\omega' - \mathbf{I}\sin^2\omega'\sin\omega \\ \qquad = -\,\Delta + \mathrm{I}\cos\omega - \mathrm{J}\cos\omega'. \end{cases}$$

Si l'on divise tous les membres par $\sin\omega$, $\sin\omega'$, $\sin\omega''$, respectivement on aura les valeurs demandées. On peut d'ailleurs s'assurer que les seconds membres ont leurs modules divisibles par ces facteurs en se reportant aux formules des trièdres, et que les ternions sont des ternions-unité.

49. *Cas général.* — Considérons maintenant le cas général de deux trièdres obliques quelconques (I, J, K) et (I_1, J_1, K_1), et désignons comme précédemment par (ω, ω', ω'') et par (ω_1, ω_1', ω_1''), les angles de leurs faces. Nous aurons à considérer deux trièdres conjugués polaires (**I**, **J**, **K**) et ($\mathbf{I}_1$, $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{K}_1$).

Nous avons vu que l'on a pour le produit de deux vecteurs d'un même trièdre les relations :

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{I\,J} = -\cos\omega'' + \mathbf{K}\sin\omega'', \\ \mathrm{JK} = -\cos\omega' + \mathbf{J}\sin\omega', \\ \mathrm{KI} = -\cos\omega + \mathbf{I}\sin\omega; \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{I_1\,J_1} = -\cos_1'' + \mathbf{K}_1\sin\omega_1'', \\ \mathrm{J_1K_1} = -\cos_1' + \mathbf{J}_1\sin\omega_1', \\ \mathrm{K_1I_1} = -\cos_1 + \mathbf{I}_1\sin\omega_1. \end{cases}$$

Si nous désignons comme précédemment par *(a, b, c...)* les neuf cosinus des angles qui forment entre eux les vecteurs de deux systèmes différents et qui assignent leur position relative ; savoir :

$$(6)\quad \begin{cases} a = \cos(\mathrm{I\,I_1}), & b = \cos(\mathrm{J\,I_1}), & c = \cos(\mathrm{I\,K_1}), \\ a' = \cos(\mathrm{I\,J_1}), & b' = \cos(\mathrm{J\,J_1}), & c' = \cos(\mathrm{J\,K_1}), \\ a'' = \cos(\mathrm{IK_1}), & b'' = \cos(\mathrm{JK_1}), & c'' = \cos(\mathrm{KK_1}), \end{cases}$$

ces neuf quantités, et les 6 quantités (ω, ω_1) sont les données de la question. Comme il s'agit de ternions, les cosinus *(a, b, c...)* expriment les projections orthogonales de chacun d'eux, sur chacun des autres de l'autre système. En considérant chacun des vecteurs d'un système comme la somme vectorielle de trois autres directions parallèles aux vecteurs de l'autre système, et en désignant par (A, B, C...) les modules de ces progressions obliques, qui sont des fonc-

tions linéaires des composantes orthogonales et des angles des faces, nous pourrons poser

$$(a)\qquad \begin{cases} I_1 = IA + JA' + KA'', \\ J_1 = IB + JB' + KB'', \\ K_1 = IC + JC' + KC'', \end{cases} \qquad (7)$$

et nous aurons d'après la théorie des trièdres :

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta^2 A \;\;= a \sin^2\omega + a' \pi'' \;\;\;+ a'' \pi', \\ \Delta^2 A' \;= a \pi'' \;\;\;+ a' \sin^2\omega' + a'' \pi, \\ \Delta^2 A'' = a \pi' \;\;\;\;+ a' \pi \;\;\;\;+ a'' \sin^2\omega''; \\ \Delta^2 B \;\;= b \sin^2\omega + b' \pi'' \;\;\;+ b'' \pi', \\ \Delta^2 B' \;= b \pi'' \;\;\;+ b' \sin^2\omega' + b'' \pi, \\ \Delta^2 B'' = b \pi' \;\;\;\;+ b' \pi \;\;\;\;+ b'' \sin^2\omega''; \\ \Delta^2 C \;\;= c \sin^2\omega + c' \pi'' \;\;\;+ c'' \pi', \\ \Delta^2 C' \;= c \pi'' \;\;\;+ c' \sin^2\omega' + c'' \pi, \\ \Delta^2 C'' = c \pi' \;\;\;\;+ c' \pi \;\;\;\;+ c'' \sin^2\omega''. \end{cases}$$

Réciproquement les composantes octhogonales s'exprimeront en fonction linéaire des composantes obliques, et s'obtiendront en résolvant ces équations linéaires par rapport aux neufs cosinus *(a, b, c...)*, et dans lesquelles les (A, B, C) n'ont pas la même signification que dans les équations (2) ; savoir :

$$(9)\qquad \begin{cases} a \;\;= A \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;+ A' \cos\omega'' + A'' \cos\omega', \\ a' \;= A \cos\omega'' + A' \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;+ A'' \cos\omega, \\ a'' = A \cos\omega' \;+ A' \cos\omega \;\;+ A''; \\ b \;\;= B \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;+ B' \cos\omega'' + B'' \cos\omega', \\ b' \;= B \cos\omega'' + B' \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;+ B'' \cos\omega, \\ b'' = B \cos\omega' \;+ B' \cos\omega \;\;+ B''; \\ c \;\;= C \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;+ C' \cos\omega'' + C'' \cos\omega', \\ c' \;= C \cos\omega'' + C' \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;+ C'' \cos\omega, \\ c'' = C \cos\omega' \;+ C' \cos\omega \;\;+ C''. \end{cases}$$

Cela posé, si nous effectuons les carrés des équations *(a)*

ainsi que leurs produits deux à deux, ou ce qui revient au même si nous les multiplions respectivement membre à membre par les ternions (I, J, K) et que nous fassions les substitutions convenables, en tenant compte des valeurs précédentes, nous aurons premièrement les relations scalars :

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{A}a + \mathrm{A}'a' + \mathrm{A}''a'' = \Delta, \\ \mathrm{B}b + \mathrm{B}'b' + \mathrm{B}''b'' = \Delta, \\ \mathrm{C}c + \mathrm{C}'c' + \mathrm{C}''c'' = \Delta; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{B}a + \mathrm{B}'a' + \mathrm{B}''a'' = \mathrm{A}b + \mathrm{A}'b' + \mathrm{A}''b'' = \cos\omega_1'', \\ \mathrm{C}a + \mathrm{C}'a' + \mathrm{C}''a'' = \mathrm{A}c + \mathrm{A}'c' + \mathrm{A}''c'' = \cos\omega_1', \\ \mathrm{C}b + \mathrm{C}'b' + \mathrm{C}''b'' = \mathrm{B}c + \mathrm{B}'c' + \mathrm{B}''c'' = \cos\omega_1; \end{cases}$$

et ensuite pour les valeurs ternions :

$$(12)\quad \begin{cases} \mathbf{K}_1 \sin\omega_1'' = \mathbf{I}\sin\omega\,(\mathrm{A}'\mathrm{B}''-\mathrm{A}''\mathrm{B}') + \mathbf{J}\sin\omega'\,(\mathrm{A}''\mathrm{B}-\mathrm{A}\mathrm{B}'') \\ \qquad\qquad + \mathbf{K}\sin\omega''\,(\mathrm{A}\mathrm{B}'-\mathrm{A}'\mathrm{B}), \\ \mathbf{J}_1 \sin\omega_1' = \mathbf{I}\sin\omega\,(\mathrm{C}'\mathrm{A}''-\mathrm{C}''\mathrm{A}') + \mathbf{J}\sin\omega'\,(\mathrm{C}''\mathrm{A}-\mathrm{C}\mathrm{A}'') \\ \qquad\qquad + \mathbf{K}\sin\omega''\,(\mathrm{C}\mathrm{A}'-\mathrm{C}'\mathrm{A}), \\ \mathbf{I}_1 \sin\omega_1 = \mathbf{I}\sin\omega\,(\mathrm{B}''\mathrm{C}'-\mathrm{B}'\mathrm{C}'') + \mathbf{J}\sin\omega'\,(\mathrm{B}''\mathrm{C}-\mathrm{B}\mathrm{C}'') \\ \qquad\qquad + \mathbf{K}\sin\omega''\,(\mathrm{B}\mathrm{C}'-\mathrm{B}'\mathrm{C}). \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant effectuer les produits de deux vecteurs de systèmes différents, en ayant égard aux relations (10 et 19) pour la partie scalar, et aux relations (12) pour la partie ternion et l'on obtient les valeurs suivantes en fonction des composantes, suivant les directions du vecteur conjugué polaire.

$$(13)\quad \begin{cases} \mathbf{I}\,\mathbf{I}_1 = -a + \mathbf{J}\sin\omega'\,\mathrm{A}'' - \mathbf{K}\sin\omega''\,\mathrm{A}', \\ \mathbf{I}\,\mathbf{J}_1 = -a' + \mathbf{K}\sin\omega''\,\mathrm{A} - \mathbf{I}\sin\omega\,\mathrm{A}'', \\ \mathbf{I}\mathbf{K}_1 = -a'' + \mathbf{I}\sin\omega\,\mathrm{A}' - \mathbf{J}\sin\omega'\,\mathrm{A}'; \\ \mathbf{J}\,\mathbf{I}_1 = -b + \mathbf{J}\sin\omega'\,\mathrm{B}'' - \mathbf{K}\sin\omega''\,\mathrm{B}', \\ \mathbf{J}\,\mathbf{J}_1 = -b' + \mathbf{K}\sin\omega''\,\mathrm{B} - \mathbf{I}\sin\omega\,\mathrm{B}'', \\ \mathbf{J}\mathbf{K}_1 = -b'' + \mathbf{I}\sin\omega\,\mathrm{B}' - \mathbf{J}\sin\omega'\,\mathrm{B}'; \\ \mathbf{K}\,\mathbf{I}_1 = -c + \mathbf{J}\sin\omega'\,\mathrm{C}'' - \mathbf{K}\sin\omega''\,\mathrm{C}', \\ \mathbf{K}\mathbf{J}_1 = -c' + \mathbf{K}\sin\omega''\,\mathrm{C} - \mathbf{I}\sin\omega\,\mathrm{C}'', \\ \mathbf{K}\mathbf{K}_1 = -c'' + \mathbf{I}\sin\omega\,\mathrm{C}' - \mathbf{J}\sin\omega'\,\mathrm{C}. \end{cases}$$

On voit que les ternions se trouvent dans le plan des ternions conjugués à chacun des systèmes, de sorte que nous pouvons prévoir une seconde expression des parties ternions, non-seulement en fonction des composantes suivant les (I, J, K), qui s'obtiendront en substituant les valeurs des **I, J, K** en fonction de ces dernières; mais nous pouvons encore les écrire de deux autres manières suivant les (**I**₁, **J**₁, **K**₁) et suivant les (I_1 J_1 K_1) du second trièdre et il suffira de poser le système inverse

$$(b)\quad \begin{cases} I = I_1 A_1 + J_1 B_1 + K_1 C_1, \\ J = I_1 A_1' + J_1 B_1' + K_1 C_1', \\ K = I_1 A_1'' + J_1 B_1'' + K_1 C_1'', \end{cases} \qquad (14)$$

pour en déduire un système d'équations semblables aux précédentes, dans lesquelles, les *(a, b, c....)* restent les mêmes et que nous nous dispensons de transcrire.

En effet, puisque les systèmes *(a)* et *(b)* sont linéaires, ils résultent l'un de l'autre par la transformation linéaire, de telle sorte que les (A_1, B_1, C_1...) sont respectivement les déterminants mineurs du système des (A, B, C...), et réciproquement ces derniers sont les déterminants mineurs du déterminant des (A_1, B_1, C_1...).

Si l'un des systèmes devient rectangulaire, les *(a, b, c..)* se réduiront respectivement aux (A, B, C...), puisque les sinus ω' deviennent égaux à l'unité, et les cosinus égaux à zéro. Le trièdre polaire se confond avec le trièdre rectangulaire. Il sera facile de compléter ces conclusions dans le cas où les deux systèmes deviennent rectangulaires.



CHAPITRE IV

CALCUL DES VERSEURS QUATERNIONS

§ I. — Equation binôme versorielle H $(z) \pm 1 = 0$

50. Théorème I. — « *Le produit de m verseurs quaternions, formant un contour polygonal sur la sphère unité et fermé, est égal à l'unité réelle positive ou négative.* »

Si H désigne le produit consécutif de m verseurs donnés, on a l'équation binôme versorielle

$$(1) \qquad H_m(z) \pm 1 = 0.$$

Nous avons vu (Th. I., ch. III) que le produit algébrique de deux verseurs-quadrants quelconques est un verseur quaternion déterminé, et que réciproquement tout verseur est le produit des deux ternions qui le limitent. Nous pouvons donc écrire

$$(2) \qquad z = (I_1 I_2) = - \cos (I_1 I_2) + \mathbf{I} \sin (I_1 I_2);$$

en observant qu'il s'agit d'une multiplication algébrique, prise dans le sens général. C'est-à-dire, que l'on aurait par exemple, pour des valeurs négatives des ternions

$$(3) \qquad \begin{cases} I_1 I_2^{-1} = I_1/I_2 = \cos (I_1 I_2) + \mathbf{I} \sin (I_1 I_2), \\ I_2 I_1^{-1} = I_2/I_1 = \cos (I_1 I_2) - \mathbf{I} \sin (I_1 I_2), \text{ etc.} \end{cases}$$

Cela posé, si l'on considère que le produit de $(m-1)$, verseurs pris dans un certain ordre, est égal au m^{m} verseur qui forme le contour polygonal sphérique, pris en signe contraire, on aura en multipliant les deux membres de l'équation versorielle par le conjugué de ce m^{e} verseur, dans le premier membre un produit de m verseurs consécutifs, et dans le second membre l'unité réelle positive ou négative, suivant le signe de ce m^{e} verseur.

Pour le montrer directement, soient $(I_1, I_2\ldots, I_m)$ les arêtes de la pyramide polygonale formée par les intersections consécutives des plans verseurs, prises dans l'ordre de la multiplication indiquée par la proposée, et soient $(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \ldots \mathbf{I}_m)$ les ternions-unité perpendiculaires au plan de deux ternions consécutifs (Ii, Ij), les termes du produit algébrique de l'équation (1) seront :

$$(4) \qquad (-\cos\omega_1 + \mathbf{I}_1 \sin\omega_1)(-\cos\omega_2 + \mathbf{I}_2 \sin\omega_2)\ldots.$$
$$(-\cos\omega_m + \mathbf{I}m \cos\omega_m) = \pm 1,$$

et nous pouvons écrire, d'après l'équation (2) le premier membre sous la forme

$$(5) \qquad (I_1 I_2)(I_2 I_3)\ldots(I_{m-1} I_m) = H_m(z).$$

Si le contour est fermé, le m^{e} ternion coïncidera avec le premier et en écrivant autrement les parenthèses, sans changer l'ordre des termes, on aura évidemment.

$$(6) \qquad I_1 (I_2 I_2)(I_3 I_3)\ldots(I_{m-1} I_{m-1}) I_1 = (-1)^m,$$

et en supprimant le facteur commun $(-1)^m$, on aura l'équation (1).

L'équation versorielle (1) n'est autre chose que l'argument de l'exponentielle linéaire

$$(7) \qquad e^{(+\mathbf{I}_1\omega_1 + \mathbf{I}_2\omega_2 + \ldots + \mathbf{I}_m\omega_m)} = +1,$$

d'où en prenant le logarithme, on aura l'équation linéaire versorielle

$$(8) \qquad \mathbf{I}_1 \omega_1 + \mathbf{I}_2 \omega_2 \ldots + \mathbf{I}_m \omega_m = 0,$$

qui exprime que le contour des verseurs est fermé. L'on ne pourra changer l'ordre ou le signe de chacun des termes que pour les permutations qui permettent d'écrire le produit par couples de ternions identiques au signe près. Telle est en particulier la permutation circulaire, puisqu'elle ne fait que changer l'origine du contour fermé. La règle algébrique est générale et donne le résultat sans ambiguité.

51. Théorème II. — « *Le produit de deux verseurs quelconques est nécessairement le troisième verseur qui ferme le triangle sphérique formé par l'intersection de leurs plans verseurs* ».

Ce théorème est un corollaire du théorème précédent, si nous considérons l'équation générale dans le cas de trois facteurs et que nous supposions les axes ternions tous positifs, savoir :

$$(9) \qquad e^{-\mathbf{I}_1 \omega_1 - \mathbf{J}_1 \omega_2 - \mathbf{K} \omega_3} = +1,$$

Cette équation linéaire exponentielle ternion est équivalente au produit

$$(10) \qquad (-\cos \omega_1 + \mathbf{I} \sin \omega_1)(-\cos \omega_2 + \mathbf{J} \sin \omega_2)$$
$$(-\cos \omega_3 + \mathbf{K} \sin \omega_3) = -1,$$

et nous pouvons l'écrire d'après le théorème précédent sous la forme

$$(11) \qquad (\mathrm{JK})(\mathrm{KI})(\mathrm{IJ}) = -1,$$

et en écrivant autrement les parenthèses, ce qui ne change rien à l'ordre et au signe des facteurs, il vient

$$(12) \qquad \mathrm{J}(\mathrm{KK})(\mathrm{II})\mathrm{J} = -1,$$

équation qui est évidente, d'après la propriété fondamentale de l'unité imaginaire.

Il est facile de vérifier ces résultats en effectuant directement le produit des deux verseurs du premier membre. Nous avons trouvé (Théor. II., ch. III)

$$(13)\quad \mathrm{JK} = -\cos\omega_1 + \mathbf{I}\sin\omega_1, \quad \mathrm{KI} = -\cos\omega_2 + \mathbf{J}\sin\omega_2,$$

nous aurons par suite,

$$(14)\quad (\mathrm{JK})(\mathrm{KI}) = \cos\omega_1\cos\omega_2 - \pi_3 + (-\mathbf{I}\sin\omega_1\cos\omega_2 \\ -\mathbf{J}\sin\omega_2\cos\omega_1 + \Delta k),$$

et en multipliant les deux membres par le conjugué de signe contraire

$$(\mathrm{IJ}) = -\cos\omega_3 + \mathbf{K}\sin\omega_3,$$

on a le résultat demandé.

On peut énoncer autrement ce théorème : « Si trois ternions-unité forment un trièdre, dont les faces sont $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et si nous désignons par (I, J, K) les trois ternions-unité du polaire conjugué, on a la relation versorielle,

$$(15)\quad \mathbf{I}\omega_1 + \mathbf{J}\omega_2 + \mathbf{K}\omega_3 = 0$$

pourvu que l'on observe l'ordre et le signe de ces six quantités. »

En effet, le trièdre positif proposé (I, J, K) n'est pas le seul que l'on puisse former par les intersections mutuelles de trois plans verseurs dont les directions sont assignées par leurs axes (**I**, **J**, **K**). A chacun des trois pôles (I, J, K) répondent quatre angles dièdres, deux à deux égaux et supplémentaires. On a donc, parmi les combinaisons de quatre quantités trois à trois, à conserver celles qui permettent un contour triangulaire fermé, et il y a en tout huit triangles sphériques distincts de valeur et de position, sur la sphère-unité, déterminés par les huit permutations de l'ordre et du signe dans l'équation linéaire (15), des angles des faces ω,

et des ternions-unité (**I**, **J**, **K**) de manière que le produit consécutif des trois verseurs puisse s'écrire sous la forme de parenthèses satisfaisant à la relation d'identité (6).

Tout arrangement qui ne satisfait pas au groupement des ternions (I, J, K) répétés deux fois, d'une manière consécutive et circulaire, donnera un verseur étranger aux triangles de (**I**, **J**, **K**). Parmi ces arrangements extrémement nombreux nous citerons les suivants :

$$\{ (IJ)\,K \}^2, \quad (IJ)\,K\,(JI)\,K, \quad (IKI)\,(JKJ), \text{ etc.,}$$

qui, d'après le théorème IV, ch. III, donneront un nouveau verseur quaternion et non l'unité réelle.

Corollaire. — On aura relativement au trièdre polaire conjugué (I, J, K) les mêmes relations déduites de l'équation linéaire versorielle

$$(17) \qquad I\varepsilon_1 + J\varepsilon_2 + K\varepsilon_3 = 0,$$

où les (ε) sont les faces du trièdre polaire conjugué, et l'on aura de la même manière les différentes formes de cette équation versorielle linéaire, pour lesquelles les conclusions sont les mêmes, savoir :

$$(18) \quad \begin{cases} (-\cos\varepsilon_1 + I \sin\varepsilon_1)\,(-\cos\varepsilon_2 + J \sin\varepsilon_2) \\ \qquad (-\cos\varepsilon_3 + K \sin\varepsilon_3) = -1, \\ \text{ou} \qquad (\mathbf{JK})\,(\mathbf{KJ})\,(\mathbf{IJ}) = -1. \end{cases}$$

Nous voyons que nous pouvons considérer ces théorèmes comme résultant de ce que les arètes d'intersections des plans verseurs deux à deux, formant un contour polygonal fermé sur la sphére-unité, sont précisément les arêtes de la pyramide polaire conjuguée et il y a réciprocité. De sorte qu'à tout contour sphérique répond nécessairement un contour conjugué polaire.

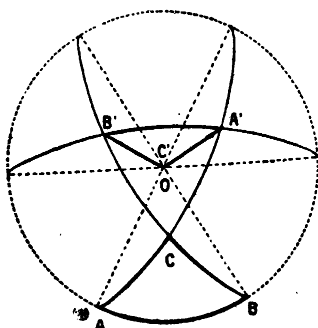
52. *Remarque*. — La démonstration du théorème II, donnée par Hamilton et reproduite par Tait (Eléments des quaternions), est particulière à la méthode de raisonnement métaphysique de cet illustre géomètre. Bien qu'elle ne soit pas entièrement exacte, et qu'il ne l'ait pas étendue à un contour polygonal quelconque, nous croyons devoir la rappeler ici.

Considérons le triangle sphérique (ABC) en projection orthogonale sur le plan du grand cercle qui passe par l'arc $\overset{\wedge}{AB}$, et dont l'axe polaire se projette en O, au centre. Soient OA_1, OB_1, les rayons de la sphère-unité, respectivement perpendiculaires aux plans des grands cercles, déterminés par les deux autres arcs $\overset{\wedge}{BC}$ et $\overset{\wedge}{CA}$ du triangle (ABC), et qui sont les ternions-unité de ces verseurs. Ils sont choisis de manière que le triangle sphérique conjugué (A_1 B_1 C_1) soit par rapport à chacun de ces plans verseurs situés dans la région opposée où se trouve le rayon perpendiculaire au verseur $\overset{\wedge}{AB}$. Ainsi OA_1 étant au-dessus du plan de $\overset{\wedge}{BC}$, et de même OB_1 étant au-dessus du plan de $\overset{\wedge}{CA}$, le rayon OC_1 au contraire est mené en sens contraire.

On voit qu'en appliquant la règle algébrique des signes dans le contour fermé

$$\overset{\wedge}{AB} + \overset{\wedge}{BC} + \overset{\wedge}{CA} = 0,$$

la rotation est de signe contraire pour les deux derniers arcs. Par suite de cette construction ou du choix du signe des arcs ternions des verseurs, les arcs $\overset{\wedge}{BC}$ et $\overset{\wedge}{CA}$ sont respectivement égaux aux dièdres A_1 et B_1, tandis que l'arc $\overset{\wedge}{AB}$ est supplémentaire du dièdre C_1. Nous aurons donc



$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{OB_1}{OC_1} = \widehat{C_1B_1} = \cos A \\ \qquad + \alpha \sin A = \alpha^x, \\ \dfrac{OC_1}{OA_1} = \widehat{A_1C_1} = \cos B \\ \qquad + \beta \sin B = \beta^y, \end{array}\right.$$

et en multipliant membre à membre on aurait d'après Hamilton

$$\frac{OB_1}{OC_1} \times \frac{OC_1}{OA_1} = \widehat{A_1B} = \alpha^x \beta^y = \gamma^{-z},$$

ou $$\gamma^{-z} = \cos(\pi - C) + \gamma \sin(\pi - c),$$

d'où $$\alpha^x \beta^y \gamma^z = 1.$$

Mais en fait Hamilton ne tient pas compte de l'ordre des facteurs, et il traite ces rapports comme des facteurs scalars. Or, le produit $\frac{OB^1}{OC_1} \times \frac{OC_1}{OA_1}$ est différent du produit $\frac{OC_1}{OA_1} \times \frac{OB_1}{OC_1}$ et c'est précisément le second ordre seulement qui permet le résultat demandé, savoir $\beta^y \alpha^x \gamma^z = 1$. En effet, contrairement à ce que dit Hamilton, la permutation

$$(\cos \omega_1 + \mathbf{I} \sin \omega_1)\ (\cos \omega_2 + \mathbf{J} \sin \omega_2)\ (\cos \omega_3 + \mathbf{K} \sin \omega_3)$$

ne peut pas donner l'unité réelle, et le produit est un verseur étranger au triangle (ABC), comme on peut le vérifier directement en effectuant les produits indiqués. Mais on peut vérifier que l'on aura pour un ordre différent des facteurs, les permutations

$$\left\{\begin{array}{l} (\cos \omega_1 + \mathbf{I} \sin \omega_1)\ (\cos \omega_3 + \mathbf{K} \sin \omega_3)\ (\cos \omega_2 + \mathbf{J} \sin \omega_2) = 1, \\ (\cos \omega_2 + \mathbf{J} \sin \omega_2)\ (\cos \omega_1 + \mathbf{I} \sin \omega_1)\ (\cos \omega_3 + \mathbf{K} \sin \omega_3) = 1, \\ (\cos \omega_3 + \mathbf{K} \sin \omega_3)\ (\cos \omega_2 + \mathbf{J} \sin \omega_2)\ (\cos \omega_1 + \mathbf{I} \sin \omega_1) = 1; \end{array}\right.$$

qui sont trois permutations circulaires d'un même arrangement tel que

$$(JK^{-1})\ (KI^{-1})\ (IJ^{-1}) = 1.$$

Ce qui montre une fois de plus que la règle algébrique des signes est générale et sans ambiguité.

53. *Quadrilatère sphérique.* — Nous pouvons encore considérer, comme exercice du théorème général, le produit de quatre verseurs quelconques formant un quadrilatère sphérique fermé, où les arguments et les ternions-unité ont des valeurs données, qui ne sont pas toutes arbitraires. Nous aurons alors cette proposition, résultant de l'application du théorème I :

« *Le produit consécutif de trois verseurs est le verseur ou l'arc de grand cercle qui ferme le contour du quadrilatère commencé par les trois autres* ».

C'est une conséquence de la règle versorielle ou des arcs de grand cercle, ayant l'analogie la plus complète avec l'addition vectorielle des verseurs linéaires dans l'espace plan à l'infini.

Soient P, Q, R, S, les quaternions-unité formant un contour fermé, quand on les prend dans leur ordre cyclique. Désignons toujours par (I_1, I_2, I_3, I_4) les intersections consécutives de leurs plans verseurs deux à deux, de telle sorte que l'on ait

$$P = I_1 I_2, \quad Q = I_2 I_3, \quad R = I_3 I_4, \quad S = I_4 I_1;$$

nous aurons

$$PQRS = 1 \quad \text{et } PQR = S^{-1},$$

en désignant par S^{-1} le réciproque de S et non pas seulement son conjugué ; c'est-à-dire que l'on a $SS^{-1} = 1$. Le signe de l'unité réelle dépendra évidemment du signe des facteurs. Comme nous les avons tous pris positifs, le résultat est ici l'unité positive.

Si nous considérons le conjugué polaire (LMNT), nous aurons un nouveau quadrilatère défini, où l'on prendra

$$L = I_1 I_2, \quad M = I_2 I_3, \quad N = I_3 I_4, \quad T = I_4 I_1,$$

et

$$LMNT = 1.$$

Mais nous avons de plus à considérer les produits des verseurs de deux en deux ou les verseurs diagonaux, savoir :

$$PQ = I_1 I_3, \quad QR = I_2 I_4.$$

On en déduit les relations complémentaires

$$RS = (PQ)^{-1}, \quad SP = (QR)^{-1},$$

car on a généralement

$$Q^{-1} P^{-1} = (PQ)^{-1}.$$

Enfin si l'on prenait les facteurs de trois en trois on retrouverait le quadrilatère proposé parcouru en sens inverse.

On pourra en déduire différentes propositions, qui auront leurs analogues dans le quadrilatère rectiligne. Nous citerons seulement la suivante :

« *Si les diagonales d'un quadrilatère sphérique se coupent en parties égales, les arcs opposés sont égaux et les arcs adjacents sont supplémentaires.* »

On pourrait donc l'appeler un parallogramme sphérique. En effet, soit $PQRS = 1$, le contour polygonal de quatre verseurs pris dans leur ordre, et soient

$$D = PQ = (RS)^{-1}, \quad \text{et } D' = QR = (SP)^{-1},$$

les deux diagonales, nous aurons

$$PR^{-1} = RP^{-1}, \quad \text{d'où } P = RP^{-1}R^{-1},$$

qui exprime une rotation de P autour de R d'un angle double. (Voir plus loin Rotations coniques.)

54. *Polygones étoilés.* — Si nous avons une suite de verseurs formant un polygone sphérique, savoir :

$$PQRST \text{etc}\ldots = \pm 1,$$

cette suite sera périodique; en désignant par n le nombre des périodes, nous aurons

$$PQRS.\ TPQR.\ STPQ\ \text{etc}\ldots = (\pm 1)^n;$$

car cela revient à multiplier les deux membres de l'équation binôme par (± 1) à chaque période. On en conclut que l'on déduira pour l'équation binôme versorielle $H_m(z) \pm 1 = 0$, les mêmes conséquences que pour l'équation binôme ordinaire $z^m \pm 1 = 0$, qui n'est qu'un cas particulier de la première, où les arguments et les ternions-unité deviennent tous égaux.

En joignant par des cordes les points d'intersections des plans verseurs sur la sphère-unité, on aura un polygone gauche, qui jouit de la propriété d'être inscriptible dans la sphère. Si tous les arguments deviennent égaux on aura un polygone régulier gauche. Nous devrons donc retrouver tous les théorèmes sur les racines versorielles de l'unité, qui ont été si bien étudiées dans le cas où les verseurs sont tous dans un même plan, et où on suppose les arguments consécutifs égaux à $\frac{2\pi}{m}$, m étant le nombre des verseurs ou le degré de l'équation binôme. Il suffirait donc de les généraliser en observant que, dans le cas général, les valeurs de l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$, ne sont plus arbitraires, mais définies et données pour chaque verseur.

On aura, par exemple, ce théorème. « Si n est premier avec m et plus petit que m, on obtiendra un nouveau polygone de m côtés satisfaisant à l'équateur binôme $H_m(z) \pm 1 = 0$, en prenant les facteurs des n périodes de l'équation de n en n ». Il y aura donc autant de polygones de m côtés satisfaisant à l'équation binôme versorielle, qu'il y a de nombres premiers à m et plus petits que m. D'ail-

leurs en prenant les sommets de n—1 en n—1, on aurait les mêmes polygones, mais parcourus en sens inverse.

Dans le cas où n n'est pas premier à m, on obtiendra un polygone de nombre de côtés inférieur à m, tel que ce nombre soit $d = \frac{m}{n}$. Ce qui revient à cette proposition :

« Si dans une équation versorielle le coutour comprend plusieurs contours partiels fermés, l'équation se sépare en autant d'équations qu'il y a de ces contours, puisque cela revient à multiplier les deux membres de l'équation par ± 1. »

§ II. — Rotations Coniques

55. Théorème. — « *L'expression $U Q U^{-1}$ exprime une rotation conique de l'axe d'un quaternion Q autour de l'axe du verseur de U d'un angle double de l'argument de ce verseur.* »

Le produit de deux verseurs exprime que l'on fait tourner le second autour de l'axe ternion du premier d'un angle indiqué par son argument. Quand le plan verseur d'un quaternion tourne ainsi autour de l'axe d'un autre quaternion, la perpendiculaire à son plan verseur ou son axe ternion décrit un cône droit, et exécute une rotation conique. On peut d'ailleurs supposer que la perpendiculaire est menée au point où le plan rencontre l'axe de rotation, qui est le sommet du cône droit. Nous aurons à considérer le cas où l'angle du cône est droit ou nul, c'est-à-dire le cas où les axes des deux facteurs sont rectangulaires ou parallèles. Dans le premier cas on a une rotation équatoriale et dans le second une rotation méridienne qui ne change pas la direction du verseur, et les arcs s'ajoutent algébriquement.

Considérons d'abord l'opération algébrique.

Le quaternion résultant $Q_1 = UQU^{-1}$, d'une rotation conique a même module, puisque par définition on a $U\,U^{-1}=1$, et même argument, et par suite même scalar. En effet toute opération circulaire ou de rotation ne peut altérer ni le module ni le scalar, et il suffira de déterminer le ternion-unité de Q_1 dans sa nouvelle position. Si donc nous posons

$$Q = q + Iq' \quad U = p + Jp'$$

en réduisant U à un verseur pour simplifier, nous aurons

$$Q_1 = UQU^{-1} = q + UI_1U^{-1}q' = q + I_1\, q'.$$

En développant directement le produit $U\,I\,U^{-1}$, nous aurons la valeur du ternion-unité I_1,

$$I_1 = UIU^{-1} = Ip^2 - (JI - IJ)\,pp' + JIJ^{-1}p'^2.$$

En désignant par **K** l'axe ternion perpendiculaire au plan (J I), nous avons trouvé (n° 42.)

$$(JI - IJ) = 2\,\mathbf{K} \sin(IJ) = 2\,\mathbf{K} \sin\omega'',$$

et n° 45

$$JIJ^{-1} = - I + 2\,J \cos\omega'',$$

et comme nous avons

$$p^2 - p'^2 = \cos 2\alpha, \quad 2\,pp' = \sin 2\alpha,$$

en désignant par α l'argument du verseur U, nous pouvons écrire

$$I_1 = I \cos 2\alpha + \mathbf{K} \sin 2\alpha \sin\omega'' + 2\,J \sin^2\alpha \cos\omega''.$$

Si les deux verseurs sont rectangulaires, et seulement dans ce cas, on a $\cos\omega''=0$, $IJ=K$, ou $IJK=1$, et l'on a la singulière relation

$$I_1 = I \cos 2\alpha + K \sin 2\alpha = I\,(\cos 2\alpha + I \sin\alpha) = IU^2.$$

Nous avons donc dans le cas d'une rotation équatoriale

$$IU^2 = UIU^{-1} \text{ ou } J^{\frac{\theta}{\pi}}\, IJ^{-\frac{\theta}{\pi}} = IJ^{\frac{2\theta}{\pi}},$$

en posant $\theta = 2\alpha$. Ainsi une rotation perpendiculaire de I autour de J d'un angle 2α transforme I en $I_1 = UIU^{-1}$.

Il importe d'observer l'ordre des facteurs, car nous avons par une rotation inverse

$$I = U^{-1}\, I_1\, U,$$

et dans le cas d'une rotation équatoriale nous avons

$$U^2 I = J^{-\frac{\theta}{\pi}}\, I_1\, J^{\frac{\theta}{\pi}} = I_1\, J^{\frac{2\theta}{\pi}};$$

mais on n'a pas généralement $I\,U^2 = UIU^{-1}$.

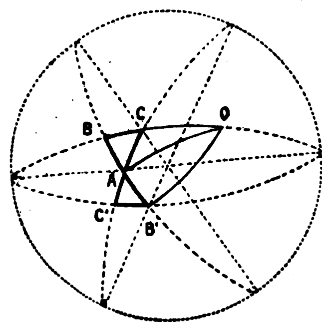
Si nous développons le résultat d'une rotation inverse $U^{-1}\,(Q)\,U$, en désignant par Q'_1 le résultat, nous aurons

$$I'_1 = I \cos 2\alpha - \mathbf{K} \sin 2\alpha \sin\omega'' + 2\,J \sin^2\alpha \cos\omega'',$$

et nous voyons que sa valeur diffère de celle de I_1 par le signe du ternion **K**.

56. *Construction géométrique*. — Soit $\overline{OB}$ l'ntersection des plans U et de Q, l'arc $\widehat{BC}$ est l'argument de Q et l'arc $\widehat{AB}$ celui de U, et nous avons par addition versorielle

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AC} = (UQ)$$



Si nous prolongeons l'arc $\widehat{AB}$ en sens inverse d'une quantité égale $\widehat{AB'}$, et l'arc $\widehat{AC}$ d'une quantité égale $\widehat{AC'}$, nous aurons $\widehat{AC} = \widehat{C'A}$ et $\widehat{AB} = \widehat{B'A}$, puisqu'ils sont pris dans le même sens. L'arc $\widehat{AB'}$ est l'argument de U^{-1} et nous aurons :

$$\widehat{C'A} + \widehat{AB'} = \widehat{C'B'} = Q_1 = (UQU^{-1})$$

Les deux triangles ABC et AB'C' sont égaux par construction comme ayant deux cotés égaux et un angle compris égal, et l'arc $\widehat{B'C'}$ est égal en grandeur à l'arc $\widehat{BC}$, c'est-à-dire, que l'argument de Q_1 est égal à l'argument de B_1 et l'arc $\widehat{BB'}$ est le double de l'argument de U. Quand à la position de Q_1, elle est celle que prend le plan verseur primitif de Q, en tournant autour du pole de U, de manière que le point B reste toujours à angle droit de ce pôle, en se déplaçant d'un angle double de l'argument de U.

57. *Composition des rotations coniques*. — Pour composer des rotations coniques autour d'axes différents, il suffira de considérer la variation du ternion. Soit donc un vecteur ternion ρ et posons

$$\rho_1 = U \rho U^{-1}$$

U étant un verseur quelconque. Si l'on opère une rotation conique autour d'un autre verseur V, nous aurons

$$\rho_2 = V\rho_1 V^{-1} = (VU) \rho (VU)^{-1}$$

car l'on a $U^{-1} V^{-1} = (VU)^{-1}$. Si l'on avait opéré d'abord la rotation V on aurait eu

$$\rho'_1 = V \rho V^{-1}$$
$$\rho'_2 = (UV) \rho (UV)^{-1}$$

et le résultat sera en général différent, puisque le produit VU est différent de UV.

Si l'on a trois verseurs tels que

$$UVW = 1, \quad \text{d'où } UV = W^{-1},$$

nous pourrons effectuer la rotation (UV) au moyen d'une seule rotation et nous aurons

$$\rho_2 = W \rho W^{-1} \quad \text{et} \quad \rho'_2 = W^{-1} \rho W.$$

Si nous voulons produire une rotation conique qui soit t fois le double de l'argument d'un verseur V, nous aurons

$$Q_1 = U^t Q U^{-t}$$

et une rotation conique inverse donnera un vecteur différent

$$Q'_1 = U^{-t} Q U^t.$$

Nous avons d'ailleurs

$$Q = U^{-t} Q_1 U^t = U^t Q'_1 U^{-t},$$

on en déduit la relation

$$Q_1 = U^{2t} Q'_1 U^{-2t}.$$

58. *Corollaire.* — Si Q exprime une somme vectorielle de quaternions tels que

$$Q = \Sigma A + \Sigma KB,$$

une rotation conique $UQU^{-1} = Q_1$ n'aura aucune influence sur la partie scalar, puisque l'on a par hypothèse $UU^{-1}=1$ et le ternion résultant sera

$$N_1 = U (\Sigma KB) U^{-1} = \Sigma B (UKU^{-1}).$$

En effet la partie scalar exprime la projection des vecteurs sur l'axe de U, et il suffira de considérer la rotation conique du ternion résultant $N = \Sigma K B$, d'où $N_1 = UNU^{-1}$.

59. *Rotations d'Euler.* — Considérons trois directions rectangulaires (i, j, k), qui, par des rotations coniques, auront pris les nouvelles positions (I, J, K) également rectangulaires. Soient $(\varphi, \varphi_1, \theta)$ les angles d'Euler ; savoir : les longitudes respectives de i et I par rapport à la ligne des nœuds N, intersection commune des plans verseurs (ij) et (IJ) des dirèctions k et K respectivement, et θ l'angle polaire $\widehat{NK}$; cette ligne des nœuds est elle-même l'axe ternion du verseur (NK).

En effet, Euler a montré le premier que les nœuf cosinus (a, b, c...) des angles que forment entre elles les directions des trois directions d'un système avec celles de l'autre système s'expriment au moyen des trois variables angulaires ci-dessus, et indépendantes entre elles. Les nœuf cosinus sont, comme nous l'avons vu, les scalars des produits quaternions (iI, iJ...) de deux ternions des deux systèmes pris deux à deux. Comme la dénomination des axes est indifférente, on peut prendre l'une quelconque des trois lignes des nœuds (N, N', N'') d'un plan verseur de l'un des systèmes avec les deux autres, et il y a 9 intersections de cette espèce.

Mais le choix d'un axe polaire détermine une de ces intersections.

Chacun des angles dont les cosinus sont (a, b, c...) forment alors le troisième coté des triangles sphériques ayant tous pour sommet l'axe N choisi, pour côtés les valeurs correspondantes de φ et φ_1, et pour angle compris la valeur correspondante de l'angle θ. On a par la trigonométrie la formule générale des trièdres

$$a = \cos\varphi \cos\varphi_1 + \sin\varphi \sin\varphi_1 \cos\theta,$$

en considérant l'angle $\theta = \widehat{kK}$) comme obtus.

Lorsque l'angle φ sera donné, on le portera à partir de l'axe i sur le plan (ij), ce qui donne la position relative de N par rapport à cet axe. L'angle φ_1 étant aussi donné, on le portera en sens inverse à partir de N et le faisant tourner d'un angle θ autour de N, on aura la position cherchée de I, puis celle de J dans le plan (I N) par une rotation d'un quadrant en sens inverse, et enfin la position de K, perpendiculaire au plan (IJ).

Si nous voulons maintenant exprimer les rotations d'Euler en fonction des rotations coniques qu'il faut exécuter pour amener le premier système à coïncider avec le second, nous

aurons en appliquant les théorèmes pré édents les rotations suivantes :

Une permière rotation d'un angle φ autour de K transforme i en N et l'on a

$$N = k^{\frac{\varphi}{\pi}}\, i\, k^{-\frac{\varphi}{\pi}} = i \cos\varphi + j \sin\varphi,$$

ce qui montre que N est un ternion-unité dans le plan (ij). Une deuxième rotation de k autour de N d'un angle θ, transforme k en K, savoir :

$$K = N^{\frac{\theta}{\pi}}\, k\, N^{-\frac{\theta}{\pi}} = k\,(\cos\theta + N \sin\theta)$$

Enfin une trosième rotation de N autour de K, transforme N en I et l'on a finalement

$$I = K^{\frac{\varphi_1}{\pi}}\, N\, K^{-\frac{\varphi_1}{\pi}},$$

et d'après l'expression de N on aura en substituant

$$I = K^{\frac{\varphi_1}{\pi}}\, k^{\frac{\varphi}{\pi}}\, i\, K^{\frac{\varphi_1}{\pi}}\, k^{\frac{\varphi}{\pi}^{-1}},$$

qui transforme directement i en I. Si l'on considère un troisième verseur $R^{\frac{\omega}{\pi}}$ tel que l'on ait

$$K^{\frac{\varphi_1}{\pi}}\, k^{\frac{\varphi}{\pi}} = R^{\frac{\omega}{\pi}},$$

l'on aura par une seule rotation autour de k d'un angle ω

$$I = R^{\frac{\omega}{\pi}}\, i\, R^{-\frac{\omega}{\pi}},$$

et inversement

$$i = R^{-\frac{\omega}{\pi}}\, I\, R^{\frac{\omega}{\pi}},$$

ω est ce qu'on appelle l'angle rectifiant et le plan de R est le plan rectifiant.

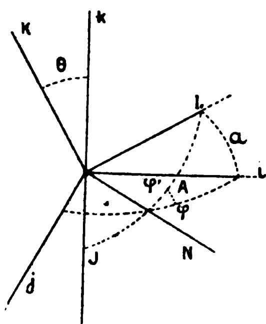
60. *Coordonnés sphériques.* — Poisson a donné une méthode, en partant toujours de la formule fondamentale relative au scalar du produit de deux verseurs φ et φ_1 dans le triangle i N I, qui donne la valeur de a, et exécutant ensuite des rotations de 90°, autour de k ce qui donne a', et transforme i en j, de même une rotation de 90° autour de k transforme I en J et b en b^1, et ainsi de suite. Cette méthode est donc au fond une méthode versorielle.

On obtiendra donc directement les valeurs des neuf cosinus $(a, b, c...)$ en fonction des angles $(\varphi, \varphi_1, \theta)$ en prenant successivement les triangles sphériques ayant tous pour sommet l'axe N et pour cotés opposés chacun des neuf angles aux cosinus a, b, c... cherchés. La règle de l'addition versorielle des arcs permettra de controler les signes et de donner aux formules leur symétrie complète.

On se rappellera d'ailleurs les formules de la trigonométrie telles que ζ étant un angle quelconque on a,

$$\cos(-\xi) = \cos\xi,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) = \sin\xi,\ \cos(\pi - \xi) = -\cos\xi,$$

$$\sin(-\xi) = -\sin\xi,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) = \cos\xi,\ \sin(\pi - \xi) = \sin\xi.$$



La formule fondamentale

$$a = \cos\varphi \cos\varphi_1 + \sin\varphi \sin\varphi_1 \cos\theta,$$

suppose que l'arc polaire θ est obtus, ou que les arcs φ et φ_1 sont des signes contraires, ce qui revient au même, et ces nœuf cosinus sont les scalars des quaternions formés par le produit de deux ternions de chaque système coordonné (45). Ils sont égaux au produit de deux autres quaternions ayant pour arcs les angles φ et φ_1 respective-

ment, en tenant compte du signe de ces arcs. On obtient ainsi les formules connues :

$$\begin{cases} a = \sin\varphi \sin\varphi_1 \cos\theta + \cos\varphi \cos\varphi_1, & a' = -\cos\varphi \sin\varphi_1 \\ \qquad + \sin\varphi \cos\varphi_1, & a'' = -\sin\varphi_1 \sin\theta\,; \\ b = -\sin\varphi \cos\varphi_1 \cos\theta + \cos\varphi \sin\varphi_1 & b' = \cos\varphi \cos\varphi_1 \cos\theta \\ \qquad + \sin\varphi \sin\varphi_1, & b'' = -\cos\varphi_1 \sin\theta\,; \\ c = \sin\varphi \sin\theta, \quad c' = \cos\varphi \sin\theta, & c'' = \cos\theta. \end{cases}$$

Ces formules qui paraissent au premier abord peu symétriques le sont cependant par rapport aux angles φ et φ_1 et le changement de φ en φ_1 ne fait que changer les lignes en colonnes, sauf le signe de sin θ, qui doit aussi changer. En effet, comme il ne s'agit que de la détermination relative d'un système par rapport à l'autre, les formules ne doivent pas changer, quand on considère l'un ou l'autre comme fixe, en observant que le sens de la rotation polaire étant prise en sens contraire, l'arc θ change de signe.

En exécutant des rotations autour de K, ou de k on transformera I en J, et i *en* j ; quand aux arcs NK et Nk nous avons vu qu'ils étaient rectangulaires, et par suite leurs cosinus disparaissent, et leurs sinus se réduisent à l'unité, dans les valeurs de c, c' et de a'', b''.

CHAPITRE V

MULTIPLICATION VECTORIELLE

§ I. — Deux vecteurs ternions

61. *Règles de leur produit.* — Les règles du produit de vecteurs donnés se déduisent de celles données précédemment pour le produit des verseurs, quand ces vecteurs sont donnés sous la forme versorielle $Q = RU$ du produit d'un facteur modulaire R par un verseur U, puisque les règles de la multiplication algébrique des modules sont celles du calcul numérique ordinaire, et comme ces modules peuvent se mettre en facteur commun on est ramené à un produit de verseurs.

Toutefois quand les vecteurs sont donnés sous la forme vectorielle $Q = A + BI$, comme somme vectorielle d'un scalar et d'un ternion, il sera utile de reprendre les règles de la multiplication sous cette dernière forme.

Considérons d'abord le cas de deux vecteurs ternions que nous désignerons par α et ρ. Leur produit est en général un quaternion.

(1) $$q = \alpha\rho.$$

Posons

(2) $$(\alpha = ix + jy + kz, \quad \rho = ix' + jy' + kz'),$$

nous aurons, en affectuant les calculs,

$$(3)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\alpha\rho = -(x\,x' + y\,y' + z\,z')\,; \\ \mathbf{T}\alpha\rho = i\,(yz' - y'z) + j\,(zx' - z'x) + k\,(xy' - x'y). \end{cases}$$

L'on voit que le ternion du produit peut se mettre sous la forme d'un déterminant

$$(4)\qquad \mathbf{T}\alpha\rho = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Nous trouverons, comme au ch. III :

1° « Si l'on intervertit l'ordre des facteurs, on obtient le quaternion conjugué ». C'est-à-dire que l'on a

$$(5)\qquad \mathbf{S}\,\alpha\rho = \mathbf{S}\,\rho\alpha, \quad \mathbf{T}\,\alpha\rho = -\mathbf{T}\,\rho\alpha.$$

Ce que l'on pourrait déduire directement de la forme du ternion, puisqu'un déterminant change de signe sans changer de valeur quand on change une ligne avec la suivante. On en conclut les relations algébriques

$$(6)\qquad \alpha\rho + \rho\alpha = 2\,\mathbf{S}\,\alpha\rho, \quad \alpha\rho - \rho\alpha = 2\,\mathbf{T}\,\alpha\rho.$$

2° « Le scalar et le ternion du produit sont deux vecteurs perpendiculaires entre eux, et il en est ainsi, par définition, pour tout verseur quaternion.

En effet, si nous écrivons.

$$(7)\qquad \mathbf{T}\,\alpha\rho = ix''' + j\,y'' + k\,z'',$$

nous aurons évidemment, d'après l'expression (3) du ternion de $\alpha\rho$,

$$(8)\quad xx'' + yy'' + zz'' = 0, \quad x'x'' + y'y'' + z'\,z'' = 0.$$

Si nous considérons maintenant le quotient de deux ternions et que nous posions

$$\alpha = q\,\rho, \text{ et } \quad q = -\,\omega + ix'' + jy'' + kz'',$$

nous aurons, en effectuant directement les calculs et comparant entre elles les diverses espèces d'unité,

$$(9)\quad \begin{cases} x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0, \\ \omega\, x' \ + y''z' + y'z'' = x, \\ \omega\, y' \ + z''x' + z'x'' = y, \\ \omega\, z' \ + x''y' + x'y'' = z; \end{cases}$$

d'ou l'on tire.

$$(10)\quad xx' + yy' + zz' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\omega},$$

$$(11)\quad \frac{x''}{yz' - y'z} = \frac{y''}{zx' - z'x} = \frac{z''}{xy' - x'y} = \frac{1}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Autrement dit : le quotient de deux vecteurs ternions

$$(12)\qquad \alpha/\rho = \alpha\rho^{-1} = -\frac{\rho\alpha}{r'^2}.$$

ne diffère de celui d'un produit, que par la partie positive du scalar et la partie négative du ternion, divisées par le carré du module du dénominateur.

Puisque $\rho\alpha$ est un quaternion conjugué du quaternion $\alpha\rho$ on aura

$$(13)\qquad \alpha\rho \cdot \rho\alpha = (\mathbf{S}\,\alpha\rho)^2 - (\mathbf{T}\,\alpha\rho)^2 = r^2 r'^2.$$

c'est-à-dire, « le produit de deux vecteurs conjugués est égal au produit des carrés des modules. »

De là on conclut l'identité de Lagrange, en remettant les composantes numériques des vecteurs :

$$(xx' + yy' + zz')^2 + \{ (y'z - yz')^2 + (z'x - zx')^2 + (x'z - xy')^2 \} = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

En supprimant les facteurs modulaires on aura la forme trigonométrique

$$(ab + a'b' + a''b'')^2 + (a'b'' - a''b')^2 + (a''b - ab'') + (ab' - a'b)^2 = 1.$$

Ce qui montre que le produit de la somme de trois carrés peut se décomposer en une somme de quatre carrés.

L'identité d'Euler se déduit de la même manière du produit de deux quaternions.

$$(v^2+x^2+y^2+z^2)(w'^2+x'^2+y'^2+z'^2)=(vw'-xx'-yy'-zz')^2$$
$$+(vx'+w'x+yz'-y'z)^2$$
$$+(vy'+w'y+zx'-z'x)^2$$
$$+(vz'+w'z+xy'-x'y)^2,$$

qui montre que la somme de quatre carrés est égale au produit de la somme de quatre carrés.

62. — L'équation $S\alpha\rho = o$ exprime que les deux verseurs α et ρ sont rectangulaires, et leur produit est un vecteur ternion, perpendiculaire à leur plan, et l'on peut poser $T\alpha\rho = \gamma$, de sorte que cette dernière équation est équivalente à la précédente. Si au contraire, on avait $T\alpha\rho = o$, cette équation exprime la condition pour que les deux vecteurs soient parallèles, et en désignant par x le rapport de leurs modules, on a l'équation $\alpha = x\rho$, qui est équivalente à la précédente. C'est-à-dire : que le produit de deux vecteurs parallèles est un scalar.

§ II. — Trois vecteurs ternions

63. *Scalar de leur produit.* — Trois vecteurs, transportés parallèlement à eux-mêmes en un point O pris pour leur origine commune, forment un trièdre et le plan qui passe par leurs extrémités détermine un détraèdre.

Soient les vecteurs ternions définis :

(14) $\alpha = ix+jy+kz,\ \rho = ix'+jy'+kz',\ \gamma = ix''jy''+kz'',$

Leur produit est un quaternion dont la partie scalar est le déterminant des quantités numériques des scalars coordonnés, ou le produit des modules par le sinus trièdre de leur angle solide.

(15) $$-S(\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = rr'r''\Delta.$$

On voit de suite, par la théorie des déterminants, qu'une permutation circulaire des facteurs n'altère pas le signe du scalar, tandis qu'une permutation impaire change le signe du scalar, sans altérer sa valeur numérique. On aura donc facilement le signe qui convient à une permutation quelconque.

64. — *L'équation* $S\alpha\beta\gamma = o$, exprime que le volume du tétraèdre formé par les vecteurs (α, β, γ) cointiaux est nul. Alors les trois vecteurs sont, ou bien tous trois dans un même plan, ou bien deux d'entre eux sont parallèles. En désignant par Δ le sinus-trièdre de ces trois vecteurs on a, par la théorie des trièdres,

$$\Delta = \sin\omega \cos\varepsilon = \sin\omega' \cos\varepsilon' = \sin\omega'' \cos\varepsilon'',$$

et l'on aura, par exemple $S(\alpha\,\beta\,\gamma) = rr'r'' \sin\omega'' \cos\varepsilon''$. Or, $r'' \cos\varepsilon''$ est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de γ sur le plan $(\alpha\beta)$, et le produit $rr' \sin\omega''$ est le double de l'aire du triangle compris entre les vecteurs α et β. L'équation $S(\alpha\,\beta\,\gamma)$ donnera donc, soit $\sin\omega'' = o$, soit $\cos\omega'' = o$. Dans le premier cas les vecteurs α et β sont parallèles, car soit $\alpha = x\beta$, on aura en substituant cette valeur

$$S\alpha\beta\gamma = x\, S\beta^2\gamma,$$

et comme β^2 est égal à r'^2, et que γ est un ternion. son scalar est nul par hypothèse. Cela résulte du reste, de ce que le déterminant $(x\, y'\, z'')$ ayant deux lignes qui ne diffèrent que par un facteur constant, il est par suite égal à zéro. Dans le second cas, γ est coplanaire avec α et β, et l'on pourra écrire

$$S\alpha\beta\gamma = S\alpha\beta\,(x\alpha + y\beta) = x\, S\alpha\beta\alpha + y\, S\alpha\beta^2 = 0\;;$$

et pour les mêmes raisons le scalar est encore nul, car le déterminant a une ligne qui ne diffère des deux autres que par la somme de ces deux lignes respectivement multipliées

par des facteurs constants, et par suite il est nul. L'on voit du reste qu'une permutation circulaire donne $S\alpha\beta\alpha = S\alpha^2\beta$ qui font rentrer les deux scalars dans le même cas.

65. *Le ternion de leur produit.* — Pour trouver l'expression de la partie ternion du produit de trois vecteurs ternions, on aurait qu'à se reporter aux formules du produit de trois verseurs quadrants. Nous donnerons ici la méthode de Hamilton. Ecrivons

$$\mathbf{T}\alpha\beta\gamma = \mathbf{T}\alpha\,(\mathbf{S}\beta\gamma + \mathbf{T}\beta\gamma),$$

puisque le produit de deux ternions est en général un quaternion, il restera à trouver la valeur de $T\alpha\ T\beta\gamma$. Or, nous avons

$$2\,\mathbf{T}\beta\gamma = \beta\gamma - \gamma\beta,$$

d'où

$$2\,\mathbf{T}\alpha\,\mathbf{T}\beta\gamma = \mathbf{T}\alpha\beta\gamma - \mathbf{T}\alpha\gamma\beta\ ;$$

si nous ajoutons et si nous retranchons la quantité $T\rho\alpha\gamma$ au second membre, nous pourrons l'écrire

$$2\mathbf{T}\alpha\,\mathbf{T}\beta\gamma = \mathbf{T}(\alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma) - \mathbf{T}(\beta\alpha\gamma + \alpha\gamma\beta) = \mathbf{T}(\alpha\beta + \beta\alpha)\,\gamma$$
$$- \mathbf{T}\,(\alpha\gamma + \gamma\alpha)\,\rho = 2\gamma\,\mathbf{S}\alpha\beta - 2\rho\,\mathbf{S}\alpha\gamma.$$

Cela suppose que l'on ait démontré que l'on a $T\alpha\gamma\beta = -T\beta\alpha\gamma$, et par suite que l'on suppose connue la forme du produit de trois vecteurs ternions. Cependant, comme on ne prend implicitement que la partie ternion, on aura en écrivant $\mathbf{T}\,(\gamma\alpha).\,\beta = -\,\mathbf{T}\beta.\ \mathbf{T}\alpha\gamma$, résultat valable parce que l'on a $\mathbf{T}\gamma\alpha = \mathbf{T}\alpha\gamma$, et une seconde inversion donne le résultat admis. Toutefois cette intercalation de deux vecteurs de signes contraires dans une addition vectorielle n'est pas sans objection, et cette intercalation est complètement arbitraire. Enfin en supprimant le facteur 2 commun et substituant la valeur de $\mathbf{T}\alpha\beta\gamma$, on aura

$$(16)\qquad \mathbf{T}\alpha\beta\gamma = \alpha\,\mathbf{S}\beta\gamma - + \beta\,\mathbf{S}\alpha\gamma + \gamma\,\mathbf{S}\alpha\beta.$$

Nous voyons que γ et α peuvent être permutés sans altérer la valeur du second membre. D'ailleurs en considérant toujours comme négatif le terme du milieu, on aura la forme de toutes les permutations. On trouvera, par exemple,

$$(17) \quad \mathbf{T}\beta\alpha\gamma = \mathbf{T}\gamma\alpha\beta = \beta\,\mathbf{S}\alpha\gamma - \alpha\,\mathbf{S}\beta\gamma + \gamma\,\mathbf{S}\alpha\beta, \text{ etc.}$$

On pourra en déduire diverses relations algébriques, telles que

$$2\,\mathbf{S}\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha, \quad 2\,\mathbf{T}\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha, \text{ etc.}$$

Comparez avec les formules du produit de trois verseurs-quadrants formant un trièdre (Ch. III); car en supprimant le facteur commun $rr'\,r''$ des modules, on n'a en réalité qu'une relation entre les verseurs des vecteurs, et comme le scalar du produit de deux vecteurs ternions positifs est négatif, il faudra en prenant les valeurs numériques changer le signe de tous les ternions.

66. *Ternions conjugués polaires.* — Les trois plans verseurs des trois ternions (α, β, γ) se coupent deux à deux suivant trois autres directions qui forment un trièdre conjugué polaire du proposé. Si donc nous multiplions deux à deux les vecteurs ternions donnés, nous aurons trois autres ternions qui forment un nouveau trièdre, savoir :

$$(18) \quad \mathbf{A} = \mathbf{T}\beta\gamma = \begin{vmatrix} i & j & k \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{T}\gamma\alpha = \begin{vmatrix} i & j & k \\ z & z' & z'' \\ x & x' & x'' \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{T}\alpha\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix}.$$

Si l'on supposait les trois directions, α, β, γ, rectangulaires entre elles, le sinus trièdre devient l'unité négative, et le ternion de leur produit trois à trois devient identiquement nul, puisque chacun des scalars $\mathbf{S}\alpha\beta$, $\mathbf{S}\beta\gamma$, $\mathbf{S}\gamma\alpha$ sont nuls, et les ternions **A**, **B**, **C** forment un trièdre rectangulaire qui coïncide avec le proposé.

§ III. Vecteurs quaternions

67. *Forme versorielle.* — Si nous considérons la forme versorielle, nous retrouvons les formules que nous avons données précédemment pour les produits des verseurs quaternions. Soient

(19) $Q = RU = R(\cos\omega + I\sin\omega)$, $Q' = R'U' = R'(\cos\omega' + I'\sin\omega')$,
et posons

$$Q_1 = QQ' = R_1(\cos\omega_1 + I_1 \sin\omega_1);$$

nous aurons en effectuant directement les calculs :

$$(20)\begin{cases} \mathbf{S}\,UU' = \cos\omega_1 = \cos\omega\cos\omega' - \sin\omega\sin\omega'\cos\theta, \\ \mathbf{T}\,UU' = I_1\sin\omega_1 = I\sin\omega\cos\omega' + I'\sin\omega'\cos\omega \\ \qquad\qquad + I''\sin\omega\sin\omega'\sin\theta, \end{cases}$$

où I'' est un ternion-unité perpendiculaire au plan de $(I\,I')$ et θ est l'angle dièdre compris entre les arcs ω et ω', dans le triangle sphérique

$$(21) \qquad UU'U_1 = -1\,;$$

car nous avons vu que le verseur U_1 est le troisième côté du triangle sphérique formé par U et U' sur la sphère unité.

Dans le cas de deux plans verseurs rectangulaires $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'on a

$$(22) \quad QQ' = RR' \left\{ \cos\omega\cos\omega' + I_1\sqrt{1 - \cos^2\omega\cos^2\omega'} \right\}.$$

Dans le cas de deux plans verseurs parallèles, $\theta = o$, l'on a

$$(23) \quad QQ' = RR' \left\{ \cos(\omega + \omega') + I\sin(\omega + \omega') \right\}.$$

On retrouve le cas particulier des quaternions plans, dont les règles de calcul sont bien connues.

La condition pour que le produit de deux quaternions

donne un ternion simple, ou que le scalar soit nul, est $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne

(24) $$\text{tang}\,\omega\ \text{tang}\,\omega' = \cos\theta,$$

qui est une formule connue des triangles sphériques rectangles.

68. *Forme vectorielle.* — Considérons maintenant la forme vectorielle, et soient

(25) $$Q = A + BI, \quad Q' = A' + B'I',$$

et posons

$$Q_1 = QQ' = A_1 + B_1 I_1.$$

Si nous observons que l'on a

$$I\,I' = -\cos(I\,I') + I''\sin(I\,I') = -\cos\theta + I''\sin\theta,$$

nous aurons

(26) $$\begin{cases} \mathbf{S}\,QQ' = A_1 = AA' - BB'\,\omega\sin\theta, \\ \mathbf{T}\,QQ' = I_1B_1 = I\,AB' + I'A'B + I''BB'\sin\theta. \end{cases}$$

Si l'angle des plans verseurs est rectangulaire, ou si $\theta = \frac{\pi}{2}$, nous aurons

(27) $$Q_1 = AA' + I_1\sqrt{R^2R'^2 - A^2A'^2}.$$

S'ils ont même plan verseur, auquel cas $I_1 = I = I'$, nous aurons

(28) $$Q_1 = (AA' - BB') + I\,(AB' + A'B),$$

qui est la formule connue du produit de deux quantités imaginaires ayant même ternion unité.

Considérons en troisième lieu, la forme algébrique coordonnée, nécessaire pour déterminer entièrement un quaternion et posons

(29) $$Q = A + iL + jM + kN, \quad Q' = A' + iL' + jM' + kN',$$

et

$$Q_1 = QQ' = A_1 + iL_1 + jM_1 + kN_1,$$

nous aurons en effectuant directement le produit Q Q′, les valeurs

$$(30)\quad \begin{cases} A_1 = AA' - (LL' + MM' + NN'), \\ L_1 = LA' + L'A + NM' - N'M, \\ M_1 = MA' + M'A + LN' - L'N, \\ N_1 = NA' + N'A + ML' - M'L'. \end{cases}$$

Nous aurons d'ailleurs en comparant avec les formules précédentes

$$(31)\quad \begin{cases} BB' \cos\theta = LL' + MM' + NN', \\ I'' BB' \sin\theta = i\,(NM' - N'M) + j\,(LN' - L'N) \\ \qquad\qquad + k\,(ML' - M'L). \end{cases}$$

La condition de perpendicularité des plans verseurs des facteurs est

$$(32)\qquad LL' + MM' + MN' = o,$$

et la condition de parallélisme est

$$(33)\qquad \frac{L}{L'} = \frac{M}{M'} = \frac{N}{N'}.$$

Ce qui est conforme à la géométrie du plan, que nous joindrons à la théorie des fonctions vectorielles du premier degré.

Enfin, comme nous pouvons mettre un quaternion sous la forme linéaire

$$(34)\qquad Q = \mathbf{S}Q - (i\mathbf{S}\,iQ + j\mathbf{S}\,jQ + k\mathbf{S}\,kQ),$$

comme nous le verrons en parlant de l'équation vectorielle linéaire, nous pouvons de même mettre le produit Q Q′ sous la forme linéaire

$$(35)\quad QQ' = Q_1 = \mathbf{S}\,QQ' - (i\mathbf{S}\,iQQ' + j\mathbf{S}\,jQQ' + k\mathbf{S}\,kQQ').$$

Ce qui permettra d'obtenir directement les coefficients numériques du produit de deux quaternions donnés, sans avoir besoin d'effectuer toutes les multiplications membre à membre. En effet, il suffira de multiplier successivement Q′

par $(1, i, j, k)$ et de prendre seulement le produit des quantités qui ont mêmes unités que le quaternion Q qu'on laisse le même.

Comme le scalar du produit de deux quaternions ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs, ou de deux groupes quelconques de facteurs, on voit d'abord que le scalar des produits QQ′ et Q′Q sont égaux ; quand aux ternions, l'interversion des facteurs ne fait que changer le signe des binômes $(NM' - N'N)$, $(L N' - L'N)$, $(M L' - M'L)$, et nous aurons par exemple

$$\text{(36)} \qquad \mathbf{S}iQQ' = \mathbf{S}Q'iQ = \mathbf{S}QQ'i,$$

tandis que le produit

$$\text{(37)} \qquad \mathbf{S}iQ'Q = \mathbf{S}QiQ' = \mathbf{S}Q'Qi,$$

donnera des valeurs différentes, par l'interversion des facteurs.

On en conclut que l'on a

$$\text{(38)} \left\{ \begin{aligned} QQ' + Q'Q &= 2\,\mathbf{S}\,QQ' + \mathrm{A}\mathbf{T}Q' + \mathrm{A}'\mathbf{T}Q, \\ QQ' - Q'Q &= 2\,\{\, i\,(NM' - M'N) + j\,(LN' - L'N) \\ &\quad + k\,(ML' - M'L)\,\}. \end{aligned} \right.$$

§ V. — Quaternions coordonnés

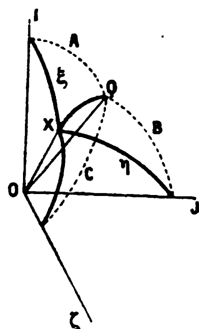
69. — Considérons les trois équations vectorielles binômes simultanées

$$\text{(1)} \qquad \xi = AU, \quad \eta = BU, \quad \zeta = CU,$$

où A, B, C sont trois quaternions constants et donnés, et U un quaternion variable. Nous pouvons faire abstraction des modules et considérer séparément les verseurs. D'après la règle du produit des verseurs, le verseur U est le troisième verseur qui forme le triangle sphérique formé par l'inter-

section des plans verseurs des deux autres, et qui est commun par conséquent à trois triangles sphériques adjacents. Soient I, J, K, les intersections des verseurs $A^{-1}\xi$, $B^{-1}\eta$, $C^{-1}\zeta$, respectivement. Nous pouvons considérer les trois ternions-unité comme formant un système coordonné et nous pouvons même les prendre rectangulaires entre eux, puisque les grandeurs absolues des A, B, C, sont arbitraires.

Si donc nous considérons la figure ci-contre, nous voyons que les quaternions remplissent les conditions exprimées par les équations proposées. Puisque les vecteurs A, B, C, sont constants en grandeur et en direction, l'axe OQ est fixe et l'axe mobile OX décrit une courbe sphérique sur la sphère-unité. Ainsi nous pouvons considérer U comme un quaternion coordonné par rapport aux quaternions fixes (A, B, C). On a comme on peut le vérifier



$$(2) \qquad \frac{\xi}{\eta} = \frac{A}{B} = K, \quad \frac{\eta}{\zeta} = \frac{B}{C} = I, \quad \frac{\zeta}{\xi} = \frac{C}{A} = J,$$

dans lesquels les rapports des variables ont la même valeur que ceux des vecteurs correspondants paramétriques.

Ces équations ont la même forme que celle des intégrales simples des mouvements vibratoires. Cauchy supposait que les verseurs pouvaient être parallèles au plan U, ce qui évidemment ne peut avoir lieu généralement.

Si nous considérons l'argument du verseur comme constant, tandis que son ternion-unité prend toutes les valeurs possibles, le point X décrit un petit cercle ayant Q pour pôle, et le vecteur variable se trouve sur un cône d'angle constant, ou décrit une spirale. Si au contraire on suppose le plan verseur de U constant, ce qui est le cas supposé par

Cauchy, le verseur OX décrit un plan de grand cercle, et le vecteur une courbe plane.

A chaque direction de l'axe polaire OQ répondra un mouvement simple différent. Ce qui montre que la théorie des mouvements périodiques infiniment petits est loin d'avoir donné toutes ses conséquences mécaniques.

CHAPITRE VI

SOMMATION VECTORIELLE

§ I. — Méthode algébrique

Nous avons dû donner d'abord les règles du produit des vecteurs, qui expriment celles de leur addition sur la sphère-unité, parce qu'elles sont la base du calcul des quaternions.

Nous avons vu (Chap. II) les règles principales de la composition vectorielle, d'où il résulte qu'une addition algébrique ne peut être relative qu'à une même unité de direction. Nous avons fait remarquer que la permutation des termes répondait à un contour polygonal défini, différent en général de forme.

Enfin nous rappellerons que le nombre des quantités numériques réelles, nécessaires pour déterminer un quaternion, est de quatre au plus, soit sous la forme vectorielle ou linéaire, soit sous la forme versorielle ou sphérique.

70. Théorème I. — *Egalité de deux quaternions.* — « *Pour que deux quaternions soient égaux, il faut et il suffit, que les parties scalars et les parties ternions soient égales séparément, ou bien que leurs modules et leurs verseurs soient égaux séparément.* »

Soit d'abord la forme vectorielle,

(1) $$Q = A + BI, \quad Q' = A' + B'I'.$$

Pour que l'on ait $Q = Q'$, on doit avoir les deux conditions

(2) $$A = A', \quad BI = B'I'.$$

La seconde égalité exige que les deux ternions-unité I et I' soient parallèles, puisque leur rapport est une quantité réelle, ce qui entraîne deux autres conditions complémentaires

(3) $$I + I' = o, \quad \text{et } B = B'.$$

Si l'on prend la forme versorielle, savoir :

(4) $$Q = R (\cos \theta + I \sin \theta), \quad Q' = R' (\cos \theta' + I' \sin \theta'),$$

nous devons avoir les deux conditions pour $Q = Q'$

(5) $$R = R', \quad U = U' \text{ ou } \cos \theta + I \sin \theta = \cos \theta' + I' \sin \theta'.$$

La dernière égalité entraine comme précédemment deux autres conditions d'égalité, entre les parties scalars et les parties ternions des verseurs, savoir :

(6) $$\cos \theta = \cos \theta' \quad \text{et } I + I' = o.$$

La première exige que l'on ait $\theta \pm \theta' = o$, ou plus généralement $\theta' \pm (\theta + 2 k\pi) = 0$, k étant un nombre entier positif ou négatif, c'est-à-dire qu'il faut que les arguments soient égaux ou ne diffèrent entre eux que d'un multiple de la circonférence d'un grand cercle, quelque soit d'ailleurs leurs plans verseurs. La seconde égalité exige comme précédemment que les axes ternions soient parallèles. En effet, les valeurs de l'unité imaginaire étant de la forme

(7) $$\begin{aligned} I &= i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma, \\ I' &= i \cos\alpha' + j \cos\beta' + k \cos\gamma', \end{aligned}$$

elles ne peuvent satisfaire à la condition $I \pm I' = o$, que si l'on a l'égalité multiple, qui exprime les conditions du parallelisme de deux directions quelconques.

(8) $$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta'} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'} = \pm 1.$$

71. *Quaternions plans.* — Dans les quaternions dans un même plan, la condition $I \pm I' = 0$ est déjà satisfaite par

hypothèse puisqu'il s'agit de la même valeur de l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$, au signe près. Il suffit pour leur égalité de deux conditions, savoir : que les modules scalars et les modules ternions soient égaux séparément, ou que les arguments ne diffèrent entre eux que d'un multiple de la circonférence d'un grand cercle. On en conclut que tous les théorèmes démontrés pour les quaternions plans, qui ne concernent pas explicitement la variation de leurs ternions-unité, sont applicables à des quaternions quelconques.

72. Théorème II. — *Addition des quaternions.*

Soient :

(9) $Q = R\,(\cos\theta + I\sin\theta),\quad Q' = R'\,(\cos\theta' + I'\cos\theta'),$
$Q'' = R''\,(\cos\theta'' + I''\cos\theta'')\ldots.$ etc.,

les quaternions qu'il s'agit d'ajouter vectoriellement dans un ordre donné, et soit le quaternion résultant de la forme

(10) $$Q_1 = P\,(\cos\varphi + K\sin\varphi),$$

nous trouverons directement le module et l'argument de leur somme de la manière suivante :

Nous avons d'abord

(11) $$\left\{\begin{array}{l} P\cos\varphi = H = \Sigma\, R\cos\theta, \\ KP\sin\varphi = KG = \Sigma\, IR\sin\theta, \end{array}\right.$$

d'où l'on tire pour la valeur du module et de l'argument

(12) $$\left\{\begin{array}{l} P = \sqrt{H^2 + G^2} = \sqrt{(\Sigma R\cos\theta)^2 - (\Sigma IR\sin\theta)^2}, \\ \operatorname{tang}\varphi = -K\dfrac{\Sigma\, PR\sin\theta}{\Sigma\, R\cos\theta} = \dfrac{G}{H}. \end{array}\right.$$

Si nous développons le radical, en observant que l'on a

(13) $$\left\{\begin{array}{l} H^2 = (\Sigma\cos\theta)^2 = \Sigma\, R^2\cos^2\theta + 2\,\Sigma\, R_{ij}\cos\theta_i\cos\theta_j\, R_j, \\ G^2 = -(\Sigma\, IR\sin\theta)^2 = \Sigma\, R^2\sin^2\theta + 2\,\Sigma\, R_i R_j\sin\theta_i \\ \qquad \sin\theta_j\cos(I^1 I_j)\,; \end{array}\right.$$

car nous avons généralement $(I_1 I_j + I_j I_i) = -2\cos(I_i I_j)$,

toute partie imaginaire disparait. De là ce théorème « *Le carré d'une somme de ternions est une quantité scalar négative.* »

Si nous y ajoutons ensemble les valeurs de H^2 et G^2, en observant que la trigonométrie nous donne

(14) $\cos(\theta_i \theta_j) = \cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j \cos(I_i I_j)$,

il vient pour la valeur numérique du module

$$(15) \qquad P = \sqrt{\Sigma R^2 + 2\Sigma R_i R_j \cos(\theta_i \theta_j)},$$

où si l'on veut

$$P = \sqrt{\Sigma R_i R_j \cos(R_i R_j)},$$

en donnant aux indices toutes les m valeurs de l'ordre des m quaternions donnés.

Si les quaternions sont donnés sous la forme vectorielle, la méthode sera la même, car soient

(16) $Q = A + BI,\ Q' = A' + B'I',\ Q'' = A'' + B''I'' \ldots$etc.,

nous aurons

$$(17) \begin{cases} H = \Sigma A, \quad KG = \Sigma IB, \\ P = \sqrt{\Sigma(A^2 + B^2) + 2\Sigma(A_i A_j + B_i B_j \cos(I_i I_j)}. \end{cases}$$

Pour déterminer le vecteur unité K, nous aurons, en supposant connues les valeurs des ternions-unité (I, I', I''...),

$$(18) \begin{cases} IR \sin\theta = B(i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma), \\ I'R' \sin\theta' = B'(i \cos\alpha' + j \cos\beta' + k \cos\gamma'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Posant

$$(19) \qquad KP \sin\varphi = G(i \cos a + j \cos b + k \cos c),$$

nous aurons pour déterminer les cosinus de direction de K les équations :

$$(20) \qquad \begin{cases} G \cos a = \Sigma B \cos\alpha, \\ G \cos b = \Sigma B \cos\beta, \\ G \cos c = \Sigma B \cos\gamma\,; \end{cases}$$

$$G = \sqrt{(\Sigma\, B \cos\alpha)^2 + \Sigma\, B \cos\beta)^2 + (\Sigma\, B \cos\gamma)^2},$$

d'où

$$k = i\,\frac{\Sigma\, B \cos\alpha}{C} + j\,\frac{\Sigma\, B \cos\beta}{C} + k\,\frac{\Sigma\, B \cos\gamma}{C}.$$

Il est facile de voir que cette valeur de G est identique avec la précédente, car on a généralement

$$(21)\left\{\begin{array}{l} \cos(I_i\, I_j) = \cos\alpha_i \cos\alpha_j + \cos\beta_i \cos\beta_j + \cos\gamma_i \cos\gamma_j, \\ \cos\alpha^2_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_1 = 1, \quad B_i = K_i \sin\theta_i. \end{array}\right.$$

Il nous reste à montrer que le produit KΣIB est un scalar négatif. Or, nous avons généralement

$$(22) \qquad KI = -\cos(\widehat{KI}) + J \sin(\widehat{KI}),$$

où l'angle K I exprime le dièdre des plans verseurs de K et I et où J est le ternion-unité perpendiculaire au plan passant par les directions K et I, ou le plan verseur du produit (K I).

Si donc nous effectuons le produit des deux membres par les B, et que nous fassions la somme des termes semblables, nous aurons

$$(23)\quad \begin{array}{rl} K\Sigma IB = & -\{\cos a\, \Sigma\, B \cos\alpha + \cos b\, \Sigma \cos\beta + \cos c\, \Sigma \cos\gamma\} \\ & + i\,\{\cos b\, \Sigma\, B \cos\gamma - \cos c\, \Sigma\, B \cos\beta\} \\ & + j\,\{\cos c\, \Sigma\, B \cos\alpha - \cos a\, \Sigma\, B \cos\gamma\} \\ & + k\,\{\cos a\, \Sigma\, B \cos\beta - \cos b\, \Sigma\, B \cos\alpha\}. \end{array}$$

Si nous substituons aux sommes leurs valeurs tirées des équations précédentes (20), nous voyons que la partie ternion s'évanouit, et que la partie scalar se réduit à — G.

D'ailleurs nous pouvons remarquer que l'équation

$$(24) \qquad \Sigma IB = KG$$

n'exprime pas autre chose, que le contour polygonal des ternions composants, il a pour résultante le vecteur ternion K G qui ferme le contour, lorsqu'on fait leur addition vectorielle ou leur addition versorielle.

73. *Cas des quaternions coplanaires.* — Dans le cas particulier où tous les ternions-unité I sont parallèles, ils ont tous la même valeur au signe près, et passent en facteur commun, de sorte que K=I, et les formules qui donnent le module et l'argument de la somme ne renferment plus de ternions-unité, et nous aurons

$$\begin{cases} P \cos \varphi = H = \Sigma\, R \cos \theta, \\ P \sin \varphi = G = \Sigma\, R \sin \theta, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} P = \sqrt{(\Sigma\, R \cos \theta)^2 + (\Sigma\, R \cos \theta)^2}, \\ \operatorname{tang} \varphi = \dfrac{G}{H} = \dfrac{\Sigma\, R \cos \theta}{\Sigma\, R \sin \theta}, \end{cases}$$

comme si les vecteurs étaient tous réels ou scalars. On aurait d'ailleurs sous la forme vectorielle en appliquant la même méthode

$$H = \Sigma\, A,$$
$$G = \Sigma\, B,$$

d'où

$$P = \sqrt{H^2 + G^2} = \sqrt{\Sigma\, R^2 + 2\, \Sigma\, R_i\, R_j \cos (R_i\, R_j)},$$
$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{G}{H} = \frac{\Sigma\, B}{\Sigma\, A}.$$

« *Donc la somme vectorielle d'un nombre quelconque de quaternions dans le même plan est un quaternion dans le même plan dont la partie scalar est la somme algébrique des scalars, dont la partie ternion est la somme algébrique des ternions et dont le module et l'argument sont déterminés algébriquement.* »

Remarque. — Cette méthode de sommation vectorielle a été employée par Fresnel pour la composition des mouvements vibratoires et bien que présentée indépendemment de la notion du calcul de l'unité imaginaire, on voit qu'elle appartient au calcul vectoriel. Il en est de même pour la

composition vectorielle des forces de translation et de rotation, exposées avec tant d'élégance par Poinsot, ce qui tient à ce que les forces sont en fait des vecteurs.

74. Théorème III. — « *Le module de la somme de deux quaternions quelconques est compris entre la somme et la différence des modules des parties.* »

Ce théorème donné par Cauchy, étant indépendant de la fonction ternion-unité, est applicable à tout quaternion.

En effet, soient

$$R(\cos\theta + I\sin\theta) + R'(\cos\theta' + I'\sin\theta') = P(\cos\varphi + K\sin\varphi),$$

nous aurons d'après les règles précédentes pour la valeur du module

$$P = \sqrt{R^2 + 2\,RR'\cos(\theta' - \theta) + R'^2},$$

donc

$$P < (R + R') > (R - R'),$$

quelque soit le plan verseur de K.

Corollaire I. — « *Le module de la somme d'un nombre quelconque de quaternions ne peut surpasser la somme des modules des parties.* »

Ce théorème est une conséquence de l'addition vectorielle, et de la forme algébrique du module résultant. Il exprime cette proposition de géométrie : « *Toute droite est plus courte que la ligne polygonale plane ou gauche qui aboutit à ses extrémités.* »

Corollaire II. — Si nous multiplions les deux membres des équations

$$P\cos\varphi = H, \quad P\sin\varphi = G,$$

la première par cos φ et la seconde par sin φ et que nous les ajoutions, puis la première par sin φ et la seconde par cos φ et que nous les tranchions, on obtient deux relations algébriques réelles, savoir :

$$P = H\cos\varphi + G\sin\varphi, \quad H\sin\varphi - G\cos\varphi - 0.$$

La première exprime que le module est égal à la somme des projections du module scalar et du module ternion sur sa direction, ou que ces trois droites forment un triangle rectangle, et par suite que le scalar et le ternion sont deux droites rectangulaires entre elles.

La seconde donne l'argument du quaternion, comme nous l'avons déjà trouvé.

En résumé, nous voyons que la méthode algébrique est applicable à la sommation vectorielle sans aucune ambiguité

§ II. — Méthode géométrique

75. — Un quaternion quelconque, considéré comme déterminant un vecteur, peut être transporté parallèlement à son plan verseur et tourné comme on voudra dans ce plan. L'addition des vecteurs, consistant à les ajouter parallèlement à eux-mêmes à la suite les uns des autres, constitue aussi une opération géométrique, qui a pour but de les rapporter à un plan scalar arbitraire et à un système d'axes ternions trirectangulaires (i, j, k) dont l'origine sur ce plan et la direction sont également arbitraires, comme doit l'être tout système de coordonnées.

On pourra donc toujours après avoir amené l'origine des vecteurs en un même point et après les avoir fait tourner dans leurs plans verseurs dans le sens positif, de manière à amener le vecteur initial de leur argument, considéré comme scalar dans un même plan, que nous appelerons plan scalar, et le vecteur modulaire, devenu vecteur-ternion, donnera la position de ce module en grandeur et en direction relative.

Il résulte de cette construction que les verseurs modulaires sont rapportés à une même origine et à un même

plan, et forment une pyramide polygonale dont la position relative est indépendante du plan scalar initial.

Les ternions-unité de chaque quaternion, qui ont été transportés parallèlement à eux-mêmes, ont conservé leurs positions relatives versorielles. Ils forment sur la sphère-unité une nouvelle pyramide polygonale, qui est la polaire conjuguée de la précédente.

Cette opération étant faite, nous pouvons transporter les vecteurs modulaires-ternions parallèlement à eux-mêmes dans un certain ordre, et si nous faisons la même chose pour les vecteurs-scalars, nous aurons un polygone des modules, généralement gauche, et un polygone des scalars, nécessairement plan. En formant sur la sphère-unité le contour sphérique dans le même ordre, le dernier arc de grand cercle détermine la grandeur et la direction de l'argument résultant, qui ferme le contour. De même, par l'addition vectorielle le dernier vecteur, qui ferme le contour polygonal des modules et des scalars, détermine le vecteur modulaire et le vecteur scalar du quaternion résultant. Du reste on peut voir que ces opérations peuvent être faites dans l'ordre que l'on voudra.

Si l'un des polygones ainsi formés se ferme de lui-même, l'argument résultant étant nul, le polygone des scalars se ferme aussi de lui-même et le vecteur résultant sera un vecteur quadrant ou un ternion. Si la sommation modulaire ternion est nulle, le vecteur résultant sera un scalar. Enfin si les deux polygones se ferment séparément, la sommation des quaternions sera nulle. Ce qui montre que la sommation des vecteurs scalars et des vecteurs ternions doit se faire séparément.

Autrement dit : une quantité vectorielle linéaire

$$\Sigma \, \mathrm{R} e^{\theta i} = \mathrm{P} e^{\varphi k},$$

se décompose en deux autres, l'une scalar initiale $\Sigma \, \mathrm{R} \cos \theta$,

l'autre ternion $\Sigma I R \sin \theta$, et pour satisfaire à l'équation vectorielle $\Sigma K e^{\theta i} = 0$, nous devons avoir séparément

$$\Sigma R \cos \theta = 0, \quad \Sigma i R \sin \theta = 0.$$

La première exprime que la somme des projections orthogonales des modules scalars, sur un axe scalar quelconque du plan scalar, est nulle, et la seconde que la somme vectorielle des modules ternions est également nulle indépendemment l'une de l'autre.

Nous voyons que dans la sommation vectorielle de vecteurs quelconques, l'opération d'addition comprend deux phases, l'une qui consiste à les comparer entre eux, en les rapportant à une origine et à un plan scalar commun, et l'autre qui consiste à les ajouter parallément à eux-mêmes.

Cette opération qui consiste à faire disparaître les scalars pourrait donc s'appeler soustraction vectorielle. Réciproquement quand on transporte des vecteurs de même nature, parallèlement à eux-mêmes et à la suite les uns des autres dans un certain ordre, cette opération constitue une addition vectorielle, puisqu'elle détermine une face du polygone plan ou gauche et par suite leur donne un scalar défini et un argument.

Ainsi additionner des vecteurs, c'est leur donner un scalar déterminé, et soustraire des vecteurs, c'est supprimer leurs scalar, en observant, d'ailleurs d'après l'état relatif de la connaissance, que l'origine et la direction des 4 coordonnées vectorielles restent arbitraires prises absolument, les 3 coordonnées ternions (i, j, k) étant assujetties seulement à être rectangulaires entre elles, et à se couper sur le plan scalar avec le quatrième coordonnée scalar.

Nous voyons que la sommation scalar ne peut influer sur la direction du ternion résultant K, ainsi que sur la valeur du module résultant P ; mais elle influe sur la valeur de l'argument qui assigne celle du scalar résultant seulement, $H = P \cos \varphi$. De même la sommation ternion ne peut influer

sur la valeur de l'axe scalar H, mais elle détermine le vecteur résultant KG en grandeur et en direction, et influe également sur la valeur de l'argument puisque l'on a

$$G = P \sin \varphi.$$

Si les quaternions sont donnés immédiatement sous la forme versorielle, on peut toujours faire l'opération versorielle ou sphérique, et l'opération versorielle ou linéaire séparément, et dans l'ordre que l'on voudra.

En faisant abstraction des modules, on aura un polygone sphérique, qui donnera le verseur résultant en grandeur et en direction. En détruisant ensuite les plans verseurs pour les développer sur un plan initial, les modules donneront par leur sommation rectiligne vectorielle le module résultant.

76. *Méthode d'Aoust.* — La détermination d'un polygone gauche a été établie par Aoust indépendamment de la notion des verseurs. Bien qu'elle soit une suite des conditions implicites de l'addition vectorielle, ce dernier calcul détermine de plus l'ordre du trajet rectiligne ou sphérique, et donne la solution rationnelle de la question géométrique dans sa généralité. D'après la méthode d'Aoust, un polygone gauche est déterminé quand on connait trois éléments ; savoir : les longueurs modulaires des cotés, les angles des faces de deux cotés consécutifs, ce qui donne leurs arguments, et enfin les dièdres des verseurs consécutifs, ce qui détermine l'axe polaire conjugué des ternions, et par suite leurs ternions-unité, ce qui achève de définir chaque quaternion composant.

Dans une seconde méthode, un polygone est déterminé par la connaissance des projections orthogonales des sommets, ce qui donne leur longueur modulaire, le plan verseur de ces sommets, l'origine commune et la direction de ce plan.

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE DES FONCTIONS VECTORIELLES DU PREMIER DEGRÉ

CHAPITRE VII

PREMIÈRES NOTIONS SUR LES FONCTIONS VECTORIELLES

Fonctions implicites

77. Définition. — « *Deux quantités quelconques qui varient simultanément, de manière que la variation définie de l'une entraîne la variation correspondante de l'autre, sont dites fonctions l'une de l'autre.* »

Il faut considérer l'une des variables comme prenant une suite de valeurs continues ou discontinues, suivant un certain trajet défini, et on l'appelle la *variable indépendante*. L'autre variable dont les valeurs sont déterminées par celles de la première s'appelle la variable principale ou la *fonction explicite*.

Soit, $f(u, v) = 0$, l'équation ou la relation analytique donnée qui relie les deux quantités variables u et v, on dit que f est une *fonction implicite* de u et v.

On peut avoir à considérer des fonctions implicites de

trois ou d'un plus grand nombre de variables, telles que $f(u, v, w, \ldots) = o$. En Mécanique et en Géométrie le nombre des variables est en général limité, ou tout au moins se ramène à un nombre défini. Mais en Analyse ce nombre peut être quelconque.

Il importe d'observer que, dans toute fonction implicite $f(u, v) = o$, l'une des variables doit être considérée comme une fonction explicite de l'autre. Si u et v sont des variables vectorielles, le vecteur u, par exemple, sera une fonction vectorielle du vecteur v. L'oubli de cette condition rend caduques les déductions que l'on peut tirer de la comparaison des parties réelles et des parties imaginaires d'une fonction implicite. Nous avons vu avec Chasles que des parties réelles et des parties imaginaires bien que coïncidentes n'appartiennent pas à la même figure, ou plus généralement à la même question analytique. C'est ainsi, que dans le traitement du coefficient différentiel d'une fonction de variables vectorielles $f(u, v) = o$, ce dernier est lui-même, en général, un quaternion et ne peut être traité comme une quantité réelle simple.

Ces premières notions, que nous faisons partir de définitions qui peuvent paraître peu nouvelles, sont cependant bien vite compliquées par la multiplicité numérique réelle et imaginaire de l'unité, et c'est à définir cette multiplicité que tendent les règles du calcul vectoriel, ou de l'unité circulaire $\sqrt{-1}$.

78. *Fonctions cartésiennes.* — Quand deux quantités variables x et y, dites cartésiennes, c'est-à-dire, à forme réelle explicite ou implicite, sont liées entre elles par une relation analytique réelle $f(x, y) = o$, l'équation exprime le lieu géométrique réel des paramètres ou coordonnées de point x et y. Nous dirons qu'une expression est de forme *cartésienne* quand les quantités données ou inconnues ne

présendent pas le signe $\sqrt{-1}$ de l'unité imaginaire, exprimé explicitemeut. En donnant à l'une des variables une suite de valeurs numériques consécutives comprises entre $-\infty$ et $+\infty$, l'autre variable prend une suite de valeurs correspondantes, satisfaisant à l'équation donnée, valeurs parmi lesquelles on ne conserve que celles qui sont réelles, puisque toutes les autres devenant vectorielles n'appartiennent plus à la figure, ou au lieu géométrique, qui est réel par hypothèse.

L'équation est dite *algébrique*, quand tous les signes explicites des opérations sont algébriques, c'est-à-dire, non périodiques. La variable principale ou la fonction explicite, étant l'inconnue, est une quantité dont les valeurs peuvent devenir vectorielles.

Quand il s'agit d'équations à coefficients réels explicites, nous savons que les racines vectorielles sont conjuguées deux à deux, leur plan verseur restant d'ailleurs complètement arbitraire. Il n'en est plus de même quand les coefficients sont vectoriels.

79. *Fonctions vectorielles.* — Quand il s'agit d'une fonction $f(u, v) = 0$, de variables vectorielles, mais cependant de forme algébrique, ces variables sont elles-mêmes des fonctions linéaires quaternions de variables cartésiennes. Si donc la théorie des fonctions vectorielles diffère beaucoup de la théorie des fonctions cartésiennes par les valeurs définies ou explicites de l'unité circulaire, elle a pour base les mêmes principes arithmétiques, auxquels il faut et il suffit de joindre ceux qui dérivent des propriétés arithmétiques de l'unité imaginaire explicite, et qui modifient profondément les théorèmes que l'on est habitué à considérer pour les quantités cartésiennes.

Ici u et v expriment un ou plusieurs vecteurs quaternions, qui sont eux-mêmes, par définition de la forme,

(1) $u = X + iA + jB + kC, \quad v = x + ia + jb + kc.$

Les fonctions cartésiennes (X, A, B, C), en considérant u comme la fonction explicite, ou la variable principale, sont elles-mêmes des fonctions déterminées et réelles des variables réelles indépendantes (x, a, b, c). En effet, quelle que soit la forme de la fonction $f(u, v) = 0$, si l'on substitue dans cette équation les valeurs (1), on pourra toujours la ramener définitivement à la forme

(2) $$f(u, v) = \varphi_0 + i\,\varphi_1 + j\,\varphi_2 + k\,\varphi_3 = 0,$$

et nous devons avoir séparément

(3) $$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0,$$

et les fonctions (X, A, B, C) seront déterminées en fonction des quatre variables (x, a, b, c) par la résolution de ce système simultané. Réciproquement, abstraction faite des difficultés de l'élimination et des valeurs multiples qui dépendent du degré algébrique des équations, on aura les fonctions inverses (x, a, b, c) en fonction des (X, A, B, C).

D'ailleurs nous n'aurons à considérer que les valeurs réelles ou scalars de ces fonctions (X, A, B, C), puisque leurs valeurs vectorielles ou imaginaires ternions, n'appartiendraient plus au lieu géométrique de ces fonctions qui est réel par hypothèse.

Ici la variable, vecteur indépendante v, prend non-seulement des valeurs arbitraires de $-\infty$ à $+\infty$ sur une direction scalar fixe, mais elle prend des valeurs arbitraires suivant une direction ternion conjuguée. Un nombre ternion peut être considéré comme un nombre *sphérique*, c'est-à-dire, ayant la même valeur sur une sphère dont le rayon est le module ternion et dont le centre se trouve sur la direction scalar. C'est là un conditionné de l'étendue, correspondant à la dualité vectorielle du nombre.

Un vecteur ternion $\rho = ia + j\,b + kc$ est complètement

arbitraire en grandeur et en direction, et peut servir à définir un point quelconque de l'espace par l'intersection commune de trois paramètres de plans rectangulaires entre eux (a, b, c). C'est là la conception de Descartes. Mais de plus un vecteur est un nombre circulaire, c'est-à-dire, qui a la même valeur pour tous les points du cercle perpendiculaire à sa direction-unité. On peut même, à cause de l'indétermination de l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$, l'appeler un nombre sphérique, comme nous venons de le dire. Mais l'on conçoit que le centre peut ne pas coïncider avec l'origine vectorielle, de là une quatrième variable, dite scalar, qui exprime par son paramètre x la distance du plan sur lequel se trouve le centre de la sphère ternion.

On aura donc la représentation la plus simple possible d'une variable quaternion $v = x + ia + jb + kc$, servant à déterminer un point quelconque de l'espace, comme l'intersection de trois plans rectangulaires, coordonnés des directions ternions (i, j, k), intersection qui se trouve elle-même sur un quatrième plan scalar coordonné. En effet, le but du calcul est de ramener toutes les questions à des questions du premier degré, et le but de la Géométrie de ramener les figures à des compositions de droites et de plans.

Nous verrons que plus généralement d'un vecteur de point peut être considéré comme une fonction linéaire à quatre termes au plus, de la forme $f(v) = x\,Q_0 + a\,Q_1 + b\,Q_2 + c\,Q_3$, où les Q sont des quaternions donnés.

80. *Biquaternions*. — On a appelé biquaternions des fonctions qui peuvent présenter le signe arbitraire $\sqrt{-1}$, de l'unité circulaire, comme il arrive pour les solutions vectorielles d'une équation cartésienne à coefficients réels. Mais cette distinction est au fond inutile. Nous avons montré que tout ternion-unité est une valeur définie de l'unité circulaire

$\sqrt{-1}$, et que cette dernière a une infinité de valeurs. Si donc une fonction $f(u, v) = 0$, renferme explicitement le signe de l'opération $\sqrt{-1}$, elle se décompose en autant d'identités, ou d'équations indépendantes, comme nous venons de le voir pour chacune des valeurs coordonnées de l'unité réelle et imaginaire n° 79 (2). C'est donc une question d'analyse indéterminée.

Nous pouvons donc toujours supposer une fonction de variables vectorielles implicites, comme ayant la forme algébrique et cartésienne. Dans le cas d'exponentielles, ou de fonctions transcendantes, qui admettent une infinité de de valeurs périodiques, nous pouvons ne considérer, que celle que Cauchy a appelé la valeur principale, et développer s'il y a lieu en série. Nous avons expliqué, dans les préliminaires, ce que nous entendons par opérations fonctionnelles élémentaires, et ces notions nous suffiront pour le cadre des fonctions que nous nous proposons d'étudier.

81. *Valeurs multiples.* — Dans une fonction implicite de variables vectorielles $f(u, v) = 0$, à chaque valeur de la variable indépendante, v, par exemple, peuvent répondre une ou plusieurs valeurs distinctes de la fonction explicite u, suivant le degré de l'équation algébrique. Si l'un des vecteurs de point v décrit une trajectoire ou se trouve sur une surface donnée arbitrairement, l'autre vecteur u décrira une ou plusieurs trajectoires, ou surfaces correspondantes et déterminées de forme par la nature de la fonction analytique proposée. Si dans le cas le plus simple, cette équation est à forme entière et rationnelle d'un polynome du degré m par rapport à u et du degré n par rapport à v, quand on donne à v l'une des n valeurs qu'il comporte, la fonction u prend m valeurs correspondantes, et si v décrit n lignes ou surfaces distinctes, continues ou discontinues y compris les branches et les nappes allant à l'infini ou revenant de l'in-

fini, la fonction u décrit dans chaque cas m surfaces correspondantes.

Autrement dit : « Une fonction entière de variables vectorielles de forme algébrique définit une quantité qui a m valeurs distinctes en chaque point de l'espace limité ou indéfini. »

La discussion complète serait extrêmement longue et pénible. Elle est au fond la même que celle de la théorie des surfaces algébriques à plusieurs nappes et celle de la théorie des points singuliers. On trouvera dans Briot (Théorie des fonctions elliptiques) la théorie des points critiques et celle de la continuité et de la multiplicité des points racines, dans le cas d'équations à plan verseur fixe, et d'équations à coefficients réels.

82. *Points racines et points critiques.* — On appelle *points racines* les valeurs de la fonction explicite qui correspondent aux valeurs de la variable indépendante, et qui sont des coordonnées vectorielles de point.

On appelle *zéros*, les valeurs de la variable indépendante, qui annulent la fonction principale et qui en sont par conséquent les origines. On appelle *pôles* les valeurs de la variable indépendante qui rendent infinies celle de la fonction. Les zéros et les pôles sont appelés points critiques ou de discontinuité.

Si pour une valeur donnée v_0 du point variable v l'équation en u à plusieurs racines égales, pour des valeurs de v voisines suivant un trajet défini, la fonction u décrit p branches de courbes, ou p nappes de surfaces passant par le point singulier u, où la fonction admet p racines égales à distance finie ou infinie. Les points singuliers à l'infini, qui sont des pôles, sont, comme on sait, les points critiques du coefficient de la plus haute puissance u de la fonction dans le polygone ordonné, que l'on suppose de forme algébrique.

Leur nombre est au plus égal à $m-n$. Les points singuliers à distance finie s'obtiennent en éliminant u entre la dérivée $\frac{d f(u, v)}{d v} = 0$, et la fonction $f(u, v) = 0$. Leur nombre est au plus égal à m $(n\text{-}1)$. Ce sont les deux sortes de points singuliers que présentent les fonctions algébriques et cartésiennes. Les points singuliers peuvent d'ailleurs être des points racines ordinaires ou continus, ou des points critiques et discontinus. Dans le premier cas on a ce que l'on appelle des nœuds, que l'on peut supposer relachés infiniment peu pour suivre leur trajet continu. Dans le second cas on a un rebroussement, et on peut imaginer une sphère infiniment petite dans laquelle la courbe ne pénètre pas, et vient s'arrêter à sa surface sous un angle fini, et sur laquelle les nappes multiples forment une courbe sphérique indicatrice.

D'un autre côté, on sait que tous les points critiques à l'infini sont sur un plan, qui se confond avec la sphère de rayon infini ; car le plan est la figure limite de toutes les surfaces dont les paramètres deviennent infinis.

83. *Champ.* — On appelle *champ* l'espace limité ou indéfini parcouru par l'extrémité mobile d'un vecteur de point dont l'origine est donnée. Un champ est défini analytiquement et géométriquement de deux manières corrélatives, soit par des fonctions scalars de points ou surfaces, soit par des vecteurs de points ou trajet vectoriel.

On peut toujours limiter un champ par une surface continue, telle que l'on puisse tracer sur cette surface un contour fermé arbitraire, y compris les nappes et les branches allant à l'infini ou revenant de l'infini.

Un champ est dit simple quand la surface limite diminuant ses paramètres jusqu'à zéro ne rencontre pas d'autres surfaces intérieures. Dans le cas contraire le champ est dit complexe. Par exemple, l'aire intérieure d'une sphère est un

champ simple quand elle ne renferme aucune surface fermée. Les surfaces intérieures peuvent se réduire elles-mêmes à un point critique, et tout champ renfermant des points critiques est un champ complexe. Inversement tout point critique est assimilable à une sphère infiniment petite dans le champ. Un point racine simple ou multiple ordinaire, dit neutre, étant continu, donne un champ simple et est assimilable à une surface canal.

On peut toujours limiter un champ par une sphère d'un rayon suffisamment grand, pouvant contenir tous les points critiques à distance finie d'une fonction entière et algébrique donnée.

Plus généralement on peut limiter le champ par une surface du second ordre, dont la sphère est un cas particulier, comprenant les pôles ou les points critiques à l'infini.

On peut toujours à l'aide d'une surface canal ou de fissures transformer un champ complexe en un champ simple, car cela revient à extérorier les points critiques. Une surface canal peut d'ailleurs se réduire à un trajet linéaire (limite de la surface canal) suivi d'une sphère infiniment petite enveloppant un point critique, et que l'on appelle *lacet*. On rend ainsi la paroi interne du champ continue et simple. De même les fissures peuvent se réduire à des surfaces diaphragmes ou *feuillets*, qui se dédoublent pour entourer un point critique; ce qui divise le champ en un ou plusieurs champs simples.

On doit avoir soin d'assigner le sens positif de la normale à la surface qui limite le champ et sépare l'espace indéfini en deux régions distinctes, l'une intérieure, l'autre extérieure par rapport à cette surface. En effet, quand un vecteur de point décrit une surface ou un trajet quelconque sur cette surface, il faut distinguer le trajet fait sur la paroi intérieure du trajet fait sur la paroi extérieure et toute surface doit être considérée comme un feuillet double et l'un d'eux forme un champ complexe par rapport à l'autre.

Il faut remarquer que la sphère n'étant qu'un cas particulier des surfaces du second ordre, ces dernières doivent être considérées comme des surfaces fermées, en ce sens qu'elles partagent l'espace indéfini en deux régions distinctes et seulement en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure.

La nappe allant à l'infini ou revenant de l'infini pour former la nappe conjuguée doit être considérée comme se fermant sur le plan à l'infini. Ainsi dans les surfaces réglées du second ordre, telles que l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique, l'espace indéfini est nettement séparé en deux régions distinctes par la surface. Dans l'hyperboloïde à deux nappes on doit considérer ces deux nappes conjuguées comme se fermant à l'infini, et l'espace indéfini est toujours séparé par la surface en deux régions distinctes, l'une intérieure, l'autre extérieure. Dans le paraboloïde elliptique toute une nappe est passée à l'infini, et l'on sait que cette surface est la limite de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à une nappe. Enfin on doit y joindre tous les cas particuliers des surfaces du second ordre, telle que les cylindres, les cônes, les plans secants ou parallèles conjugués deux à deux. Ainsi, dans le cas de deux plans parallèles à distance finie, la région intérieure est séparée de la région extérieure et cette dernière est reliée par le plan à l'infini commun.

84. *Trajet vectoriel d'un point.* — Si l'équation $f(u, v) = o$ est irréductible, c'est-à-dire, non décomposable en facteurs de même forme, et que nous ayons marqué les points critiques $(a_1, a_2 \ldots)$, en nombre fini, qui annulent la fonction principale, et qui en sont les différentes origines, quand la variable indépendante v part d'un point initial (v_0), auquel ne répond pas un point critique, et si (u_0) est la valeur correspondante de la fonction u, choisie parmi les m valeurs qu'elle peut avoir en un même point, il peut arriver,

suivant le trajet de la variable indépendante sur une surface du champ, donnée arbitrairement, que l'on revienne au point de départ, après un trajet défini et fermé de cette variable, avec une valeur différente u_0 de la fonction. C'est qu'alors le trajet a traversé la surface racine u_0. Si par exemple, la surface arbitraire, sur laquelle est tracé le trajet fermé de v, renferme un ou plusieurs points critiques, il y a changement brusque de l'argument de la fonction. Nous avons vu comment on peut transformer un champ complexe ou un champ simple au moyen de lacets ou de diaphragmes, et pour tout trajet de la variable vecteur v, qui ne traverse pas la paroi de cette surface à champ simple, on reviendra au point de départ avec la même valeur u_0 de la fonction.

Si l'on peut décrire une sphère ou plus généralement une surface quelconque du second ordre, ne comprenant aucun point critique dans son intérieur, tout trajet fermé quelconque, décrit sur la paroi interne de cette surface, ramènera à la même valeur u_0 de la fonction, choisie au point de départ.

Si un point critique est multiple, et est par suite un point singulier discontinu de la fonction $f(u, v) = 0$, il faut le considérer comme le point d'intersection d'autant de nappes distinctes que la fonction admet de racines égales en ce point, et il ne faudra traverser aucune de ces nappes, autrement le vecteur v reviendra au point initial v_0 avec une nouvelle valeur de la fonction u. Comme d'ailleurs la fonction implicite est supposée irréductible, on pourra en décrivant des lacets successifs revenir au point de départ avec l'une quelconque des p valeurs de la fonction qui se permuttent au point critique.

Si pour une valeur définie des plans verseurs l'équation a des racines multiples, elles forment comme le démontre longuement et complètement Briot (loco citato) un système circulaire de p racines, ainsi qu'il résulte de la solution de

l'équation binôme versorielle plane $u^{p} \,\underline{+}\, 1 = v$.

Plus généralement, si q est l'ordre de multiplicité d'un point critique, ces racines se permuttent sur une sphère infiniment petite, et ces racines sont les solutions de l'équation binôme versorielle $H_q(u) \,\underline{+}\, 1 = 0$, et les nappes forment sur cette sphère le polygone sphérique indicateur de la fonction u au point critique considéré. Lorsque le trajet de la variable traverse ces plans verseurs, il y a changement brusque de l'argument de la fonction.

Dans le cas d'un point singulier neutre, le trajet étant continu, on pourra étudier sur cette sphère unité la structure du nœud.

Quand il s'agit de fonctions vectorielles à plan verseur fixe, la surface qui limite le champ est réductible au diaphragme ou au feuillet plan limité par une courbe plane. La question se simplifie beaucoup, parce que les arguments s'ajoutent algébriquement et la condition de l'ordre cyclique des verseurs s'évanouit.

Donc pour généraliser la théorie des fonctions vectorielles, qui a été traitée par Briot et Bouquet dans le cas d'une trajectoire plane du vecteur de point v, et l'appliquer directement à une fonction à plan verseur variable, il suffira de considérer le plan limité par une courbe fermée, comme formant un feuillet double et multiple, qui peut comprendre un ou plusieurs points critiques ou aucuns, et de considérer ces feuillets comme se déformant ou se gonflant, entraînant dans leur déplacement général les points critiques primitivement projetés sur un même plan. En un mot, il suffira de passer de la géométrie du plan à celle des surfaces.

Il n'est pas toujours facile de passer du cas d'une surface plane à celui d'une surface quelconque, parce que beaucoup de circonstances s'évanouissent par la projection plane. Mais la Géométrie descriptive nous enseigne à déterminer la posi-

tion des points critiques dans l'espace, quand on connaît trois projections planes non situées deux à deux dans un même plan, en supposant que les plans soient donnés de position, ou que leurs scalars soient déterminés, ce qui exige la connaissance d'un quatrième plan scalar, d'ailleurs arbitraire. L'état actuel de la science des surfaces, au point de vue Analytique, Géométrique et Cinnématique permet avec un peu d'attention de préciser la généralisation à effectuer.

Ce n'est pas là qu'est la vraie difficulté du calcul des fonctions vectorielles. Cette dernière consiste à élucider la nature des surfaces à quatre variables indépendantes qui se trouvent liées entre elles par la nature de l'unité vectorielle quaternion.

85. *Fonctions à quatre variables cartésiennes.* — Pour comprendre le système des quatre fonctions cartésiennes (X, A, B, C) d'une fonction explicite vectorielle

$$u = X + iA + jB + kC$$

à quatre variables indépendantes réelles (x, a, b, c) d'un vecteur de point

$$v = x + ia + jb + kc,$$

nous devons considérer le cas des fonctions explicites, c'est-à-dire, que nous supposerons désormais que les quatre fonctions explicites $\varphi = 0$, du n° 79, sont résolues par rapport aux paramètres scalars des fonctions cartésiennes (X, A, B, C) en fonction des variables indépendantes (x, a, b, c).

Lamé avait entrevu l'existence d'une quatrième fonction de point, conjuguée des trois fonctions de point orthogonales, en chaque point d'un milieu limité ou indéfini, dans son discours préliminaire sur les coordonnées curvilignes.

« Les familles de surfaces considérées isolément ou par association éclaircissent incontestablement l'état statique dans les diverses branches de la physique mathématique, tel

que l'équilibre des températures dans les solides, ou l'équilibre d'élasticité dans les milieux pondérables. Mais pour définir avec succès l'état dynamique, il faudrait considérer les variations des surfaces conjuguées, leurs transformations successives, savoir comment se modifie la *surface isostatique* avec le temps. Il en est ainsi dans toute l'hydrodynamique, dans la propagation des ondes, et les lois de l'échauffement et du refroidissement des milieux pondérables.

C'est toute une quatrième branche de la Géométrie, à peine entrevue, à peine ébauchée, qu'il faudra créer avant que la physique mathématique aujourd'hui stationnaire puisse faire des progrès nouveaux et définitifs. Cette branche correspondra à l'intégration de fonctions à quatre variables des coordonnées et du temps ».

Remarquons que Lamé a déjà considéré le paramètre d'une fonction de point comme une fonction implicite du temps, et le temps lui-même comme une fonction de point. Mais le calcul vectoriel nous montre directement que cette quatrième variable indépendante n'est le temps, qu'autant qu'on le considère comme le scalar définissant un déplacement vectoriel quaternion.

« Les systèmes isostatiques, dit Lamé, correspondent aux trois fonctions de point conjuguées orthogonalement en un point du milieu, et ne paraissent assujetties à aucune autre condition que celle de l'orthogonalité de trois familles de surfaces qui les composent. Mais à chacune de ces trois familles répond une quatrième surface d'égale intensité... ».

CHAPITRE VIII

NOTIONS SUR LES FONCTIONS EXPLICITES

86. *Définition*. — Si l'on peut résoudre une équation $f(u, v) = 0$, par rapport à l'une des variables de manière que l'on ait $u = F(v)$, on dit que F est une fonction explicite du vecteur v. Ce sont les seules fonctions dont nous aurons à nous occuper.

Si l'équation était résolue par rapport à v et que l'on eût $v = \varphi(u)$, on dit que φ est la fonction inverse de F, et la forme peut en être fort différente. Elle est presque toujours une transcendante et par suite multiforme quand la fonction directe est irrationnelle, ou bien périodique.

Une fonction $u = F(v)$ est dite uniforme quand elle n'admet qu'une seule valeur déterminée pour chaque valeur donnée de la variable, ce qui est le cas des fonctions algébriques à forme entière et rationnelle. La fonction exponentielle linéaire, qui est un quaternion, est une fonction vectorielle uniforme, quand on n'envisage qu'une valeur définie de la période. Mais il n'en est plus de même pour la fonction inverse ou angulaire, qui est multiforme.

Soit, comme exemple très simple, la fonction rationnelle $u = v^n$, n étant entier. Cette fonction prend en chaque point n valeurs distribuées versoriellement sur la circonférence de grand cercle du plan verseur de v. Mais, si l'on cherche à déterminer la fonction inverse $v = u^{\frac{1}{n}}$, l'exposant étant fractionnaire, pour chaque valeur de u on aura n points

différents. Ainsi la fonction directe est uniforme et la fonction inverse est multiforme. Si u est une fonction périodique, la fonction inverse admet une infinité de valeurs différentes, correspondant à chaque valeur, non-seulement de l'argument de la période, mais encore à chaque valeur du plan verseur de la fonction, c'est à dire de la valeur explicite ou implicite de l'unité circulaire, comme nous l'avons montré en parlant des premières notions sur la fonction exponentielle linéaire.

87. *Discontinuité.* — La notion de discontinuité analytique est loin d'être suffisamment définie. Nous avons défini les points critiques, qui sont les zéros et les infinis ou les pôles d'une fonction, comme étant des points de discontinuité. Les règles que nous donnons ici sont empruntées à l'ouvrage de Houel (*Théorie des quantités complexes*).

Une fonction explicite peut être discontinue de plusieurs manières, savoir : soit en passant brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie différente, soit en devenant infinie pour des valeurs finies de la variable. Le premier cas se présente lorsque le trajet vectoriel traverse la surface qui limite le champ, et qui le sépare en deux régions distinctes, l'une intérieure, l'autre extérieure, par le changement brusque du signe de la normale ; c'est pourquoi on l'appelle surface de discontinuité.

Dans le second cas, si l'on considère la fonction réciproque $u = \frac{1}{v}$, ou $uv = 1$, à chaque zéro de la fonction répond un infini de la fonction réciproque. Généralement si la fonction $u = \mathrm{F}(v)$ devient infinie pour une valeur $v = c$ de la variable, c'est un pôle de la fonction. Ainsi, par exemple, les zéros du dénominateur dans une fonction rationnelle algébrique sont les pôles de la fonction. Or, il peut arriver que la fonction réciproque $\frac{1}{\mathrm{F}(v)}$ soit continue

dans le voisinage du point c, ce qui a lieu quand $F(c + dv)$ est infiniment petit autour du point c, et le zéro est un point racine ordinaire. Si, au contraire, $\frac{1}{F(v)}$ n'est pas continue au voisinage du point c, ce qui a lieu quand $F(c + dv)$ passe brusquement d'une valeur finie à une autre valeur finie différente, alors $\frac{1}{F(c + dv)}$ n'est pas infiniment petit et le point c est un point critique ou de discontinuité.

Ces raisonnements s'appliquent immédiatement aux fonctions vectorielles de forme cartésienne à plan-verseur variable, dès que l'on suppose connue la forme du développement d'une fonction vectorielle $F(c + dv)$.

88. *Forme d'un polynôme entier vectoriel.* — Nous pouvons toujours considérer un polynôme entier comme une fonction de variables et de constantes vectorielles implicites. Mais la forme générale d'un tel polynôme diffère de la forme ordinaire d'un polynôme à coefficients réels ou scalars, en ce que l'on ne peut pas intervertir l'ordre des facteurs dans chaque terme sans changer la valeur de la fonction, ni même l'ordre des termes additifs, sans changer la nature du contour des vecteurs composants.

Une équation linéaire ou algébrique exprime toujours une somme de vecteurs variables, ajoutés dans leur ordre pour former un contour rectiligne fermé, plan ou gauche. Le changement dans l'ordre additif, autre que la permutation circulaire ne fait que changer l'ordre dans lequel les vecteurs sont ajoutés, sans changer la valeur de chaque terme, comme nous l'avons montré en définissant l'addition vectorielle.

Nous devons donc écrire généralement

$$F(v) = \Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_1 v q_1 + \Sigma p_2 v q_2 v r_2 + \ldots \text{ etc.},$$

ou les p, q, r.., sont des quaternions donnés et constants,

non-seulement en grandeur et en direction, mais aussi en position relative à un plan scalar et un système ternion coordonnés, par rapport au vecteur variable v. Ils pourront d'ailleurs se réduire selon les cas à des ternions ou à des scalars.

Remarquons que la différence de forme est purement versorielle, c'est-à-dire, relative aux verseurs, car nous pouvons écrire l'équation précédente sous la forme

$$F(r) = a_0 U_1 + a_1 RU_1 + a_2 R^2U_2 + \cdots + a_n R^nU_n,$$

où R est le module de v, et a_0, a_1.., le produit des modules des vecteurs constants p, q, r.., et les U sont des fonctions verseurs, résultant du produit des verseurs de chaque terme, et constituant une fonction linéaire de verseurs de la forme

$$\Sigma (\cos \alpha_i + i \sin \alpha_i)(\cos \omega + I \sin \omega)(\cos \beta_i + j \sin \beta_i)$$
$$(\cos \omega + I \sin \omega) \cdots = U_i,$$

ou bien une somme d'exponentielles ternions

$$\Sigma e^{\alpha_i i + \omega I + \beta_i j + \omega I + \gamma ik \cdots} = U_i$$

qui sert à déterminer le plan verseur de chaque terme.

Nous voyons que lorsqu'il s'agit d'une fonction vectorielle entière, à plan verseur variable, la formule du binôme de Neuton n'est plus applicable dans les mêmes conditions et la réduction des termes semblables à $(m + 1)$ n'est plus permise. Il y a généralement 2^m termes du développement. C'est pourquoi, il sera généralement préférable pour la recherche des points critiques de ramener la solution d'une fonction explicite $u = F(v)$ à celle de quatre fonctions cartésiennes à quatre variables réelles, abstraction faite de la longueur des développements.

Supposons que nous ayons trouvé tous les points critiques $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots)$, qui annulent la fonction, et qui par suite donnent un contour fermé. Les $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots)$ sont les différentes origines de la fonction. Formons l'équation

$$P\,(v-\alpha) = u.$$

Comme nous ne pouvons intervertir l'ordre des facteurs de cette équation, à chaque permutation répondra une valeur différente de la fonction, et une forme différente de F (v). Si l'équation admet n points critiques, on aura $(n-1)$ permutations non circulaires, et par suite autant de valeurs différentes de la fonction u, ou d'un polynôme entier vectoriel ayant mêmes points critiques. Nous pouvons y ajouter les permutations additives, qui ne font que changer la forme du contour polygonal sans altérer la valeur de chaque terme, et par suite celle des points critiques.

Dans le cas de quaternions-plans, la question se simplifie beaucoup, parceque les arguments s'ajoutent algébriquement, et la fonction

$$P\,(z-a) = u,$$

est indépendante de l'ordre des facteurs. On trouvera dans Briot *(loco citato)* une étude détaillée de cette question, dont nous citerons l'exemple suivant.

On a généralement

$$u = (z-a_1)^{\frac{p_1}{q_1}}\,(z-a_2)^{\frac{p_2}{q_2}}\cdots\,(z-a\;)^{\frac{p_n}{q_n}},$$

où les exposants sont des facteurs rationnels irréductibles. La forme versorielle devient

$$u = r_1^{\frac{p_1}{q_1}}\,r_2^{\frac{p_2}{q_2}}\cdots\left\{\cos\left(\frac{p_1}{q_1}\,\theta_1\frac{p_1}{q_1}\,\theta_2+\cdots\right)+i\sin\left(\frac{p_1}{q_1}\,\theta_1+\frac{p_1}{q_1}\,\theta_2\cdots\right)\right\}$$

Si un contour fermé renferme un point critique a_1 son argument augmente de 2π à chaque révolution périodique, et celui de la fonction est multiplié par le verseur quaternion $j_1 = \cos 2\pi\frac{p_1}{q_1} + i\sin 2\pi\frac{p_1}{q_1}$, qui est une racine primitive de l'équation binôme $i_1^{\frac{p_1}{q_1}} = 1$. Une seconde révolution donne

$u_1 j_2$, une troisième $u_1 j_3$... etc., et la fonction u prend au point z, q_1 valeurs différentes, et un nouveau tour ramènera u_1. Si l'on tourne ensuite autour d'un second point critique a_2 avec l'une quelconque des q_1 valeurs précédentes, prises comme valeur initiale de la fonction, on obtiendra q_2 valeurs différentes, et si q_1 et q_2 sont premiers entre eux la fonction acquiert $q_1 q_2$ valeurs différentes au point z, et ainsi de suite, suivant que le trajet fermé et arbitraire de z renferme un, deux, ou plusieurs points critiques.

Cauchy a donné une méthode pour calculer le nombre de points critiques contenus dans un contour donné, qui consiste à déterminer combien de fois la tangente de l'argument devient infinie, ou le rapport $\frac{y}{x}$ des composantes du quaternion $u = x + i\,y$, c'est-à-dire, combien de fois le polynome scalar x s'annule en passant d'une valeur positive à une valeur négative. Le nombre des variations, qu'il appelle l'indice du contour, donne le nombre des points critiques compris dans ce contour. Il est à supposer que si Cauchy, au lieu de considérer la partie imaginaire comme étant dans le plan du tableau, eut considéré le vecteur i comme perpendiculaire au plan scalar du tableau, il eut passé naturellement du cas du cercle à celui de la sphère, bien qu'il fallut pour cela la découverte de Hamilton du calcul de l'unité imaginaire dans l'espace.

Si nous substituons à la fonction versorielle binôme plane $\mathbf{I}\frac{p}{q} = 1$, la fonction versorielle binôme $\mathbf{P}\frac{p}{q}(u) = 1$, dont nous avons ébauché les propriétés, si de plus à un contour plan de la variable indépendante, nous substituons un contour fermé arbitraire sur une surface du champ, pouvant contenir un ou plusieurs points critiques, la méthode de Cauchy devient immédiatement applicable à la théorie des points racines et des points critiques d'une fonctio

vectorielle à forme algébrique ; mais elle nous montre en même temps la multiplicité des solutions communes à quatre fonctions cartésiennes de quatre variables, réelles, dans la fonction linéaire

$$u = X + iA + jB + kC,$$

à laquelle il sera préférable de ramener sa solution.

89. *Forme linéaire vectorielle.* — D'une manière générale, une fonction explicite

$$u = F(v), \tag{11}$$

d'une variable quaternion v, peut toujours se décomposer en une somme linéaire de la forme

$$u = X + iA + jB + kc, \tag{12}$$

où les X, A, B, C, sont des fonctions scalars des variables réelles, x, a, b, c, des composantes du vecteur de point

$$v = x + ia + jb + kc. \tag{13}$$

En effet, puisque toutes les opérations algébriques que l'on peut exécuter sur les coordonnées ternions i, j, k, reproduisent soit l'unité réelle, soit l'une des unités imaginaires i, j, k, il est toujours possible de ramener une fonction explicite à la forme ci-dessus.

Si donc nous posons

$$\begin{cases} X = F_0(x, a, b, c), & A = F_1(x, a, b, c), \\ B = F_2(x, a, b, c), & C = F_3(x, a, b, c), \end{cases} \tag{14}$$

qui, ajoutées vectoriellement, doivent reproduire la fonction u, et que nous supposions que ce système simultané soit résolu par rapport aux variables x, a, b, c, abstraction faite des difficultés de l'élimination, ainsi que des valeurs multiples résultant du degré des équations algébriques, nous obtiendrons quatre fonctions

$$\begin{cases} x = f_0(X, A, B, C), & a = f_1(X, A, B, C), \\ b = f_2(X, A, B, C), & c = f_3(X, A, B, C), \end{cases} \tag{15}$$

qui, ajoutées vectoriellement, devront reproduire l'une des valeurs de la fonction inverse

(16) $$v = \varphi (u).$$

Les points critiques s'obtiendront algébriquement par la résolution des solutions communes

(17) $$X = 0, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

ce qui donnera généralement $m\,n\,p\,q$ valeurs de v pour lesquelles la fonction u s'annulera, en désignant par m, n, p, q, les degrés respectifs des équations (17). Les paramètres de ces deux systèmes (14) et (15) ne sont pas arbitraires. Ils sont liés entre eux par des relations algébriques qui expriment, d'une part la perpendicularité des trois paramètres ternions A, B, C entre eux, et d'autre part la perpendicularité du paramètre scalar x, au ternion résultant

$$Ly = i\mathrm{A} + j\mathrm{B} + \mathrm{KC},$$

et il en est de même pour les quatre paramètres x, a, b, c, considérés comme des fonctions des X, A, B, C. Ces relations constituent la théorie des paramètres différentiels, et donnent les conditions d'intégrabilité d'une quadrature vectorielle

(18) $$V = f(u)\,dv,$$

que nous étudierons dans la troisième partie.

Les X, A, B, C sont donc de nouvelles coordonnées, en général curvilignes, qui expriment, soit les fonctions de point F, soit la valeur numérique des paramètres de quatre surfaces particulières du champ, soit enfin les coordonnées des fonctions inverses f, sans que cette extension, comme l'a montré Lamé, donnée à un même symbole, occasionne de confusion. Leur interprétation se rattache d'ailleurs aux trois points de vue analytique, géométrique et cinétique de la connaissance scientifique.

Il semblerait qu'il faudrait 6 variables indépendantes, 3 pour déterminer la grandeur et la direction du vecteur scalar, de même qu'il y en a 3 pour déterminer la grandeur

et la direction du vecteur ternion d'un quaternion. Mais les deux systèmes de perpendicularité, que nous venons de mentionner, qui caractérisent une quantité vectorielle, réduisent ces variables à 4 distinctes, nécessaires et suffisantes pour déterminer un quaternion.

Ainsi, en résumé, la résolution d'une fonction vectorielle explicite de forme algébrique, c'est-à-dire, ne renfermant aucun signe explicite d'opération périodique, se ramène à la détermination de quatre fonctions réelles de quatre variables réelles. Inversement, pour que l'on puisse exprimer une fonction linéaire vectorielle u, en fonction algébrique d'une seule variable vectorielle v de la forme $u = F(v)$ et de paramètres constants, aucune des fonctions X, A, B, C ne peut être donnée arbitrairement et elles doivent satisfaire à un système de conditions algébriques, qui constitue la théorie des fonctions de point.

90. *Fonctions de point.* — On appelle *fonction de point* la valeur numérique réelle d'une grandeur, soit analytique, soit géométrique, soit physique, déterminée en chaque point de l'espace limité ou indéfini, laquelle valeur change d'un point à un autre du champ, et change aussi avec le temps en un même point d'une manière continue ou discontinue (*Lamé, Coordonnées curvilignes).*

La continuité de la fonction est exprimée par une relation analytique réelle, sans qu'il soit nécessaire de recourir à une interpolation indéfinie. D'un autre coté, la discontinuité physique est assurée par la méthode même du calcul infinitésimal, et au moyen d'un coefficient de masse ; car de même que le point est l'élément de discontinuité géométrique, de même la masse est l'élément de discontinuité physique infinitésimale.

Une fonction analytique de point s'exprime en coordonnées de ses points. Egalée à une constante ou paramètre, elle

représente une surface ou un lieu géométrique des points du champ pour lesquels cette valeur numérique reste constante, quand on fait varier les coordonnées. Une fonction de point est une fonction scalar, et par suite une fonction de plans, et peut toujours être considérée comme intersection ou enveloppe de ses plans tangents. Telles sont en particulier toutes les grandeurs scalars, comme la densité, la pression, la température, et généralement un potentiel, dénotant un état physique déterminé de masse. Leur lieu géométrique prend, suivant les cas, les noms de surface de niveau, surface isotherme, surface isodynamique, isentropique, isostatique, et généralement de surface potentielle, suivant la nature de la grandeur que cette fonction de point définit.

Autrement dit : « Une fonction de point égalée à une constante représente une surface dont cette constante est le paramètre. »

Si l'on donne à cette constante une série de valeurs successives, on a une série de surfaces, qui forment une famille de surfaces, dont la forme peut changer beaucoup avec la valeur numérique du paramètre, et dont les formes successives définissent un champ.

Une fonction de point des coordonnées et du temps donne à chaque instant une nouvelle famille de surfaces, que l'on peut considérer isolément en regardant le temps constant. Si le temps varie en même temps que les coordonnées, on a une famille de surfaces d'ondes dont le temps est le paramètre ; le temps est alors une fonction de point déterminée. Réciproquement le paramètre d'une fonction de point peut toujours être regardé comme une fonction implicite du temps, ou comme la dernière variable qui rend la fonction homogène, de sorte qu'on peut toujours considérer le temps comme la variable scalar d'un quaternion.

La famille de surfaces que l'on considère, offre généralement plusieurs paramètres géométriques distincts, tous

nécessaires à la définition complète du lieu. Bien qu'on puisse les exprimer tous en fonction de l'un d'entre eux, il est souvent utile et préférable d'exprimer chacun d'eux séparément, principalement pour maintenir la symétrie des formules et faciliter les éliminations. Ainsi, le paramètre d'un plan, qui est la seule surface du premier degré, est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan et en assigne la direction par son verseur, et sa position par son module. Dans les surfaces du second ordre, il y a en général trois paramètres distincts et conjugués entre eux, qui sont les valeurs des axes de ces surfaces. Dans le cas particulier de la sphère, ces paramètres se reduisent à un seul qui est le rayon de la sphère.

Soit une fonction vectorielle $u = F(v)$ du premier degré ; chacune des fonctions X, A, B, C du quaternion

$$u = X + iA + jB + kC$$

sera une fonction du premier degré à quatre variables. Or la géométrie nous apprend que deux plans se coupent suivant une droite, et que trois plans se coupent en général en un point. Mais ce que le calcul vectoriel nous apprend de plus, c'est qu'un quaternion linéaire et du premier degré, détermine non seulement le point d'intersection des trois plans de son vecteur ternion, mais que ce point se trouve de plus sur un quatrième plan directeur, qui est le plan scalar X, de la quatrième coordonnée vectorielle. En donnant à la variable scalar X une valeur arbitraire on aura une suite de plans parallèles perpendiculaires à leur axe scalar directif ; alors, tandis que la série des plans scalars se meut parallèlement à elle-même, la série des plans A, B, C rectangulaires entre eux, forme un réseau dont l'intersection sera toujours une valeur de la coordonnée ternion $\rho = ia + jb + kc$, du vecteur de point v, et cette extrémité (ρ) se trouvera toujours sur la valeur correspondante scalar w.

Supposons que la fonction X soit seule du second ordre, et que les fonctions (A, B, C) soient du premier degré, nous aurons pour l'extrémité ρ, l'intersection commune des plans (A, B, C), tandis que cette intersection sera sur une surface du second degré, et il y aura deux valeurs du scalar qui satisferont à la question. Plus généralement les fonctions X, A, B, C seront des fonctions algébriques des degrés m, n, p, q, et le nombre des solutions de la fonction $u = F(v)$ sera de $mnpq$ au plus. Si l'équation est homogène et de dégré m, on aura m^4 valeurs distinctes de u pour chaque valeur de v. Si, par exemple, les trois fonctions (A, B, C) sont trois surfaces homofocales conjuguées du second ordre, et par suite octhogonales, la quatrième surface X homogène sera la surface réglée du second ordre, ou le paraboloïde hyperbolique sur lequel se trouve le point ternion des trois surfaces homofocales, et complètera le champ vectoriel du second ordre.

Ce qu'il importe d'observer dans le maniement des coordonnées vectorielles, c'est que la partie ternion

$$iA + jB + kC,$$

et la partie scalar, bien que pouvant varier d'une manière indépendante, sont liées entre elles par la continuité de la fonction u. On pourra toujours au moyen de la partie scalar X, supposée nulle ou constante, éliminer la variable x dans les fonctions (A, B, C), et retrouver le système des coordonnées de Lamé dans une de ses positions particulières. De même on pourra, au moyen des trois fonctions A, B, C, éliminer de la fonction X les coordonnées a, b, c, et obtenir une équation en x seul, qui donnera les positions correspondantes de l'axe scalar ou du paramètre scalar.

Réciproquement si les quatres surfaces (X, A, B, C) viennent à changer de forme, les coordonnées vectorielles d'un point v du champ changent suivant un trajet hodographe,

qui se trouve à chaque instant sur les quatre surfaces. Si le trajet se fait sur l'une des surfaces, le paramètre de cette surface reste constant, et celui-ci disparaitra de la différentielle de la fonction, c'est-à-dire que le trajet sera constamment dans le plan tangent à cette surface. Si le trajet de la variable se trouve sur deux surfaces, X et A par exemple, il se trouvera sur leur ligne d'intersection, et l'on aura comme cas particulier celui d'une trajectoire plane de la fonction $u = X + iA$, où i est constant, système qui a été examiné par Briot et Bouquet, et ainsi de suite.

91. *Coordonnées de point.* — Le point se détermine de deux manières corrélatives, soit comme intersection commune de fonctions de point, soit comme addition vectorielle d'un vecteur de point.

Deux fonctions de point simultanées représentent les lignes d'intersection des deux surfaces représentées par les deux fonctions de point. Réciproquement tout trajet vectoriel sur une surface peut être considéré comme l'intersection d'une autre surface avec la première. Trois fonctions de point simultanées représentent un ou plusieurs points communs aux trois fonctions de point. Enfin quatre fonctions de point à quatre variables expriment le *vecteur* de *point* de la fonction vectorielle linéaire de ces quatre fonctions.

En effet, déterminer un quaternion c'est trouver l'intersection commune de trois surfaces octhogonales (A, B, C) coordonnées, telle que cette intersection se trouve sur une quatrième surface X de la fonction $u = F(v)$. Réciproquement pour déterminer un ou plusieurs vecteurs de point, il faut considérer le point comme l'intersection commune de quatre fonctions de point coordonnées vectoriellement, par rapport auxquelles le point n'a qu'une détermination relative.

Les surfaces coordonnées les plus simples et auxquelles se

ramènent toutes les autres sont exprimées par les paramètres de quatre plans conjugués vectoriellement et qui déterminent un point vecteur $v = x + ia + jb + kc$. Les paramètres sont les normales aux plans coordonnés, et sont appelés coordonnées rectilignes ou cartésiennes. Mais de ce que le système cartésien soit fondamental, il ne suffit pas à donner toute la généralité qui convient à un système de coordonnées quelconques. En effet, quand on a égard à la dualité du nombre circulaire, on voit que le système cartésien a pour conjugué ternion ou imaginaire le système sphérique, qui est tout aussi fondamental, et qui de plus est lié au système planaire par la dualité de l'unité réelle et imaginaire.

Descartes dans sa géométrie (1637) imagina de déterminer la position d'un point sur un plan en menant par ce point des parallèles à deux droites fixes qui se coupent à l'origine ; l'une ordinairement verticale est l'ordonnée, l'autre horizontale est l'abcisse. Pour déterminer un point il faut tenir compte non seulement de la grandeur numérique (module), mais encore de son signe (qui est un verseur). Ces distinctions de signes ne présentent aucune difficulté aux personnes familiarisées avec les principes de la trigonométrie et les règles de l'addition des vecteurs.

Le système des coordonnées vectorielles est une généralisation des coordonnées curvilignes de Lamé, et il n'en diffère pas, quand il s'agit d'une fonction linéaire ternion ou dont le scalar est nul ou constant. Plus généralement les fonctions de point curvilignes (X, A, B, C) étant toujours considérées comme de nouvelles coordonnées, dites vectorielles, sont assujetties comme les coordonnées cartésiennes ou rectilignes (x, a, b, c) à des conditions qui établissent entre elles des relations géométriques nécessaires.

La géométrie vectorielle à quatre coordonnées indépendantes, conséquence de la dualité réelle et imaginaire, est

distincte de la géométrie tétraédrique. Dans cette dernière les 4 variables ne sont pas indépendantes, et leur rapport seul est déterminé, de sorte que la quatrième variable est en fait l'unité de mesure ou l'échelle de construction de la figure, et les équations sont essentiellement homogènes. Dans la géométrie vectorielle, la quatrième variable est la conjuguée réelle ou scalar relativement à la résultante conjuguée imaginaire ou ternion des trois autres coordonnées, et il faut une cinquième variable arbitraire pour rendre une fonction vectorielle homogène. Nous pouvons définir leur relation de la manière suivante : Les coordonnées tétraédriques de quatre plans de référence forment généralement un tétraèdre, d'où vient leur nom, et il y a toujours une figure corrélative de la première, c'est-à-dire, à laquelle des points de la première répondent des points de la seconde, et à des plans de la première répondent des plans de la seconde. On sait que si l'un des plans de référence s'éloigne à l'infini, on retrouve le système cartésien. Or il y a toujours un second plan de référence conjugé anharmonique du premier ; si l'un deux se rapproche de l'origine, l'autre s'en éloigne à l'infini, et l'on retrouve le système vectoriel proprement dit.

Lamé avait entrevu la nécessité de ramener les coordonnées rectilignes ou curvilignes à un système triplement orthogonal. Aoust avait abordé le système général des coordonnées obliques, mais il a reculé devant la multiplicité des paramètres et s'est trouvé ingénieusement ramené au système des trièdres conjugués polaires, ou des composantes normales et tangentielles, conséquence inévitable de la dualité vectorielle.

92. *De la variable hodographe.* — Le choix de la variable hodographe, ou de la trajectoire d'un vecteur de point v, d'une fonction explicite $u = \mathrm{F}\ (v)$, n'est pas aussi arbitraire qu'on pourrait le croire. En effet, d'après

la nature de la connaissance rationnelle ou des lois objectives de la pensée, on ne peut avoir à considérer que trois points de vue du concret des choses, savoir : le nombre, la figure et la masse. Au point de vue du nombre, ou purement analytique, la variable paramétrique est un coefficient réel de mesure de quantité, ou une telle somme vectorielle de coefficients réels, qui sont au nombre de trois au plus pour une sommation de ternion, et de quatre pour un quaternion.

Il en résulte que la somme vectorielle d'un nombre quelconque de vecteurs se ramène à un vecteur de point coordonné, qui ne peut dépendre que de quatre indéterminées, de sorte qu'une sommation de plus de 4 indéterminées scalars n'a plus de signification géométrique définie. En effet, soit généralement $u = \Sigma\, w\, Q$, où les w sont des indéterminées numériques et les Q des quaternions donnés, et de la forme $Q_i = X_i + iA_i + jB_i + KC_i$, elle prendra la forme linéaire

$$u = W + iX + jY + kZ$$

où l'on a posé pour abréger

$$W = \Sigma w D, \quad X = \Sigma w A, \quad Y = \Sigma w B, \quad Z = \Sigma w C,$$

et comme nous n'avons que quatre équations, nous ne pouvons déterminer que quatre des indéterminées numériques en fonction linéaire des autres, qui restent arbitraires. Ce qui s'accorde avec les conditionnés géométriques des polygones, car, au-delà du quadrilatère gauche, la composition se ramènera à une suite linéaire de tels quadrilatères plans ou gauches, et en définitif la figure géométrique la plus simple est le tétraèdre, comme nous aurons occasion de le montrer.

En second lieu, au point de vue géométrique la variable hodographe est la trajectoire réelle du point vecteur, quelle que soit sa multiplicité, et chaque élément rectiligne donne la trajectoire rectifiée. Quand on considère, par exemple, un vecteur de point ternion comme fonction de

l'axe s que décrit son extrémité mobile, il faut, si l'on pose

$$\rho = i\, f_1(s) + j\, f_2(s) + k\, f_3(s),$$

que les fonctions réelles f_i satisfassent à la relation algébrique réelle

$$[f'_1(s)]^2 + [f'_2(s)]^2 + [f'_3(s)]^2 = 1,$$

en désignant par f' la dérivée de f. Car ce rapport $\frac{d\rho}{ds}$ étant un verseur-quadrant, son carré est l'unité réelle négative. On pourra y satisfaire au moyen de paramètres, dont il faudra choisir une valeur principale s'ils sont périodiques, comme il arrive généralement. Soit, par exemple, l'équation de l'hélice ordinaire, prise pour uné valeur particulière de la trajectoire d'un point vecteur, nous pourrons poser

$$f_1(s) = \mathrm{b} \cos\left(\frac{s}{a}\right), \quad f_2 = b \sin\left(\frac{s}{a}\right), \quad f_3 = s\,\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

et l'on voit que ces fonctions paramétriques satisfont à la condition demandée, et l'équation vectorielle d'un point vecteur, qui décrit une hélice circulaire, pourra s'écrire

$$\rho = i\, b \cos\left(\frac{s}{a}\right) + j\, b \sin\left(\frac{s}{a}\right) + k\, \mathrm{s}\,\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

Enfin en troisième lieu, au point de vue physique, la variable paramétrique est le temps des déplacements matériels. De sorte que toute variable indépendante des composantes d'une fonction de point vecteur est une fonction implicite du temps réel, qui est ainsi en définitif la variable hodographe proprement dite, par ce qu'en fait la mesure du temps est le nombre réel, le temps n'ayant pas de représentation imaginaire, et le déplacement géométrique est forcément une mesure implicite de déplacements considérés dans le temps.

D'ailleurs il est illusoire d'employer le calcul vectoriel,

quand il s'agit de l'équation d'une courbe ou d'une surface prise dans son contour réel et particulier, qu'elle doit à la valeur numérique de ses paramètres considérés comme constants et réels ; de même qu'il n'est pas sensé de faire intervenir le calcul différentiel quand il s'agit de quantités rationnelles, ou de transformer en exponentielles des quantités rationnelles ou implicites, tandis qu'au contraire le but du calcul est de ramener par la substitution le calcul des transcendantes au calcul algébrique, et de ramener les figures à des systèmes de plans et de droites dont elles sont l'enveloppe.

CHAPITRE IX

FONCTIONS VECTORIELLES DU PREMIER DEGRÉ

§ I. — Forme de l'équation du premier degré

93. *Forme linéaire.* — Puisque toutes les opérations algébriques exécutées sur les composantes orthogonales ternions (i, j, k) d'un vecteur quelconque reproduisent soit l'unité réelle scalar, soit l'une des trois unités ternions (i, j, k), il est toujours possible de mettre une fonction explicite $U=F(u)$ sous la forme linéaire

$$U = \mathrm{W} + i\mathrm{X} + j\mathrm{Y} + k\mathrm{Z}. \tag{1}$$

où les W, X, Y, Z, désignent quatre valeurs numériques réelles ou paramètres de surfaces de point coordonnées du vecteur de point

$$u = \mathrm{w} + i\mathrm{x} + j\mathrm{y} + k\mathrm{z}. \tag{2}$$

Comme un quaternion variable ne dépend que de quatre variables numériques, indépendantes, ou de quatre indéterminées réelles, il en résulte que la forme (1) étant supposée du premier degré exprime une somme vectorielle de quatre fonctions linéaires de quatre variables cartésiennes, et ces fonctions sont par suite les paramètres de quatre plans coordonnés, le plan étant la seule surface du premier degré.

La fonction U est composée de 16 coefficients constants au plus. Si donc nous posons

$$(3)\quad \begin{cases} W = D_0 w + D_1 x + D_2 y + D_3 z, \\ X = A_0 w + A_1 x + A_2 y + A_3 z, \\ Y = B_0 w + B_1 x + B_2 y + B_3 z, \\ Z = C_0 w + C_1 x + C_2 y + C_3 z, \end{cases}$$

et si nous substituons ces valeurs dans l'équation (1), en mettant les w, x, y, z, en facteur commun, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$(4)\qquad F(u) = w\, Q_0 + x\, Q_1 + y\, Q_2 + z\, Q_3,$$

que nous appellerons la forme *cartésienne*, parce que l'on peut considérer la forme vectorielle des Q comme implicite.

Nous avons posé pour abréger

$$(5)\quad \begin{cases} Q_0 = D_0 + iA_0 + jB_0 + kC_0, \\ Q_1 = D_1 + iA_1 + jB_1 + kC_1, \\ Q_2 = D_2 + iA_2 + jB_2 + kC_2, \\ Q_3 = D_3 + iA_3 + jB_3 + kC_3, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} Q'_0 = D_0 - (iD_1 + jD_2 + kD_3) \\ Q'_1 = A_0 - (iA_1 + jA_2 + kA_3) \\ Q'_2 = B_0 - (iB_1 + jB_2 + kB_3), \\ Q'_3 = C_0 - (iC_1 + jC_2 + kC_3). \end{cases}$$

Le système (6) constitue ce que nous appellerons le système conjugué inverse du système (5) considéré comme direct. A l'aide de ce système nous pouvons écrire l'équation (1) sous la seconde forme

$$(7)\quad F(u) = \mathbf{S}Q'_0 u + i\, \mathbf{S}Q'_1 u + j\, \mathbf{S}Q'_2 u += k\, \mathbf{S}Q'_3 u,$$

que nous appellerons plus spécialement la forme *vectorielle*, parce que les coordonnées vectorielles *(i, j, k)* y sont exprimées explicitement. Elle donne la forme linéaire (3) des fonctions scalars de point W, X, Y, Z de l'équation (1).

94. *Théorème.* — Il résulte de la comparaison des formules précédentes que, si la forme cartésienne est exprimée en fonction des quaternions directs Q, la forme vectorielle

s'exprimera directement en fonction des conjugués inverses Q' et réciproquement.

Ce théorème est général et indispensable dans la transformation linéaire des quaternions. Nous voyons que ces deux systèmes forment l'un un système à ternion positif et l'autre un système à ternion négatif. De plus ils sont conjugués, c'est-à-dire formés des mêmes 16 coefficients et ils diffèrent entre eux, en ce que les lignes de leur déterminant sont transformées en colonnes et réciproquement.

Si le déterminant de ces 16 coefficients devient symétrique, il n'y a plus que 10 coefficients distincts, et le système des Q' est identique au système des Q quant aux coefficients, mais ils sont toujours conjugués, et ils ont des ternions égaux et de signes contraires. Nous dirons qu'ils sont conjugués directs, ou conjugués d'eux-mêmes.

Nous désignerons par $\bar{Q}$ le conjugué de Q, et l'on a $Q\bar{Q}=\mathrm{M}^2$, où M est le module. Tandis que nous désignerons par Q^{-1} le réciproque de Q, de telle sorte que l'on a $QQ^{-1}=1$. Pour éviter toute confusion nous écrirons toute quantité vectorielle en italique et toute quantité scalar en caractère ordinaire.

95. *Réduction des termes semblables.* — Une fonction vectorielle du premier degré à forme entière et rationnelle ou plus généralement à forme cartésienne implicite est composée d'une somme finie de termes de la forme la plus générale

$$\mathrm{F}(u) = \Sigma\, puq, \tag{8}$$

dans laquelle u est l'inconnue, et les p et les q sont des quaternions donnés et constants, qui peuvent se réduire suivant la nature du problème à des ternions ou à des scalars. Les termes indépendants de l'inconnue peuvent être compris dans l'expression de la fonction F (u), car cela revient à

choisir convenablement l'origine commune des vecteurs, de manière qu'elle soit commune aux deux variables initiales U_1 et u_1 ce qui est toujours permis. D'abord parce que tout système de vecteurs peut être transporté comme on voudra, ensuite parce que la relation analytique donnée exprime une relation définie de position.

Si nous opérons directement sur l'équation proposée (8), nous aurons évidemment d'après l'équation (4).

(9) $Q_0 = \Sigma pq, \quad Q_1 = \Sigma\, piq, \quad Q_2 = \Sigma\, pjq, \quad Q_3 = \Sigma\, pkq.$

Posons

(10) $p = \mathrm{g} + i\mathrm{l} + j\mathrm{m} + k\mathrm{n}, \quad q = \mathrm{g}' + i\mathrm{l}' + j\mathrm{m}' + k\mathrm{n}'$

nous aurons par la règle du produit de deux quaternions

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{D}_0 = \Sigma \,\{ \mathrm{gg}' - (\mathrm{ll}' + \mathrm{mm}' + \mathrm{nn}' \,\} = \Sigma\, \mathbf{S}pq, \\ \mathrm{A}_0 = \Sigma \,\{ \mathrm{gl}' + \mathrm{g}'\mathrm{l} + \mathrm{mn}' - \mathrm{m}'\mathrm{n} \,\} = -\, \Sigma\, \mathbf{S}ipq, \\ \mathrm{B}_0 = \Sigma \,\{ \mathrm{gm}' + \mathrm{g}'\mathrm{m} + \mathrm{n}'\mathrm{l} - \mathrm{n}'\mathrm{l} \,\} = -\, \Sigma\, \mathbf{S}jpq, \\ \mathrm{C}_0 = \Sigma \,\{ \mathrm{gn}' + \mathrm{g}'\mathrm{n} + \mathrm{lm}' - \mathrm{l}'\mathrm{m} \,\} = -\, \Sigma\, \mathbf{S}kpq; \text{ etc.} \end{cases}$$

et ainsi de suite pour les autres coefficients. Nous aurons ainsi le tableau suivant, où nous avons supprimé le signe somme pour abréger et qui montre comment et pourquoi les 16 coefficients sont distincts, savoir :

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{D}_0 = \mathbf{S}pq, & \mathrm{D}_1 = \mathbf{S}piq, & \mathrm{D}_2 = \mathbf{S}pjq, & \mathrm{D}_3 = \mathbf{S}pkq, \\ \mathrm{A}_0 = -\mathbf{S}ipq, & \mathrm{A}_1 = -\mathbf{S}ipiq, & \mathrm{A}_2 = -\mathbf{S}ipjq, & \mathrm{A}_3 = -\mathbf{S}ipkq, \\ \mathrm{B}_0 = -\mathbf{S}jpq, & \mathrm{B}_1 = -\mathbf{S}jpiq, & \mathrm{B}_2 = -\mathbf{S}jpjq, & \mathrm{B}_3 = -\mathbf{S}jpkq, \\ \mathrm{C}_0 = -\mathbf{S}kpq, & \mathrm{C}_1 = -\mathbf{S}kpiq, & \mathrm{C}_2 = -\mathbf{S}kpjq, & \mathrm{C}_3 = -\mathbf{S}kpkq. \end{cases}$$

Si F (u) est un quaternion constant, nous voyons par la réduction des termes semblables, que l'on a pour chacune des 4 inconnues W, X, Y, Z, une valeur unique, et par suite la valeur du vecteur de point cherché et unique

$$u = \mathrm{w} + i\mathrm{x} + j\mathrm{y} + k\mathrm{z}.$$

Il suffit pour cela que le déterminant du second membre des équations (3) ne soit pas nul. On a donc en définitif un sys-

tème simultané de quatre équations linéaires à quatre variables et la question est purement algébrique.

96. *Forme générale.*— Nous avons considéré jusqu'ici la fonction linéaire $U = F(u)$, donnée par la formule (1), comme rapportée à des coordonnées vectorielles ternions rectangulaires ; mais d'une manière générale, nous pouvons prendre pour coordonnées des directions vectorielles quelconques.

Désignons par $\xi = f(u)$ une fonction linéaire de la manière que forme U, savoir :

(13) $\xi = \mathbf{S}q'_0u + i\,\mathbf{S}q'_1u + j\,\mathbf{S}q'_2u + k\,\mathbf{S}q'_3u,$

où l'on a toujours le vecteur de point

(14) $u = \mathrm{w} + i\mathrm{x} + j\mathrm{y} + k\mathrm{z}.$

D'après le théorème du n° 94 nous aurons immédiatement pour la forme cartésienne implicite

(15) $\xi = \mathrm{w}\,q_0 + \mathrm{x}\,q_1 + \mathrm{y}\,q_2 + \mathrm{z}\,q_3.$

en désignant toujours par les q' le système conjugué inverse du système des q, formé des mêmes 16 coefficients numériques, comme le montrent les formules (5) et (6), et qui peuvent être différents de ceux des Q.

Si nous désignons maintenant par les p quatre nouveaux quaternions, donnés arbitrairement, et par les p' leurs conjugués inverses, nous pouvons écrire une fonction linéaire quelconque $U = F(u)$ en fonction du vecteur de point ξ sous la forme vectorielle

(16) $U = \mathbf{S}p'_0\xi + i\,\mathbf{S}p'_1\xi + j\,\mathbf{S}p'_2\xi + k\,\mathbf{S}p'_3\xi,$

et la forme cartésienne implicite prend la forme générale cherchée

(17) $U = p_0\,\mathbf{S}q'_0u + p_1\,\mathbf{S}q'_1u + p_2\,\mathbf{S}q'_2u + p_3\,\mathbf{S}q'_3u,$

qui dépend de huit quaternions arbitraires, et qui montre que l'on peut substituer au trajet vectoriel u, une fonction

linéaire quelconque de cette variable. En effet, cela revient à considérer les Q' comme des fonctions linéaires de même forme, en fonction des huit quaternions donnés ou du système des p et des q, savoir :

$$(18)\quad \begin{cases} Q_i = f(q_i) = \mathbf{S}p'_0q_i + i\,\mathbf{S}p'_1q_i + j\,\mathbf{S}p'_2q_i + k\,\mathbf{S}p'_3q_i, \\ Q'_i = f'(p'_i) = \mathbf{S}q_0p'_i + i\,\mathbf{S}q_1p'_i + j\,\mathbf{S}q_2p'_i + k\,\mathbf{S}q_3p'_i. \end{cases}$$

Ces relations donnent la forme vectorielle des Q et des Q', en fonction des trente deux coefficients des p et des q. En effet, c'est comme si l'on décomposait arbitrairement les Q suivant les quatre composantes des quaternions p et les Q' suivant les quatre composantes des quaternions q'

Posons

$$(19)\quad \begin{cases} p_0 = s_0 + i\,l_0 + j\,m_0 + k\,n_0, \\ p_1 = s_1 + i\,l_1 + j\,m_1 + k\,n_1, \\ p_2 = s_2 + i\,l_2 + j\,m_2 + k\,n_2, \\ p_3 = s_3 + i\,l_3 + j\,m_3 + k\,n_3\,; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} q_0 = d_0 + i\,a_0 + j\,b_0 + k\,c_0, \\ q_1 = d_1 + i\,a_1 + j\,b_1 + k\,c_1, \\ q_2 = d_2 + i\,a_2 + j\,b_2 + k\,c_2, \\ q_3 = d_3 + i\,a_3 + j\,b_3 + k\,c_3. \end{cases}$$

Nous aurons pour la forme cartésienne des Q et des Q', en appliquant directement le théorème du n° 94 aux formules (18),

$$(21)\quad \begin{cases} Q_0 = d_0p_0 + a_0p_1 + b_0p_2 + c_0p_3, \\ Q_1 = d_1p_0 + a_1p_1 + b_1p_2 + c_1p_3, \\ Q_2 = d_2p_0 + a_2p_1 + b_2p_2 + c_2p_3, \\ Q_3 = d_3p_0 + a_3p_1 + b_3p_2 + c_3p_3, \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} Q'_0 = s_0q'_0 + s_1q'_1 + s_2q'_2 + s_3q'_3, \\ Q'_1 = l_0q'_0 + l_1q'_1 + l_2q'_2 + l_3q'_3, \\ Q'_2 = m_0q'_0 + m_1q'_1 + m_2q'_2 + m_3q'_3, \\ Q'_3 = n_0q_0 + n_1p'_1 + n_2q_2 + n_3q'_3. \end{cases}$$

97. *Fonction conjuguée.* — Considérons maintenant une seconde fonction linéaire que nous désignerons par $\eta = \mathrm{F}(u)$, de la même forme que ξ, mais formée avec les p, savoir :

$$(23) \qquad \eta = \mathbf{S}p'_0u + i\,\mathbf{S}p'_1u + j\,\mathbf{S}p'_2u + k\,\mathbf{S}p'_3u,$$

dont la forme cartésienne implicite peut s'écrire immédiatement

$$(24) \qquad \eta = \mathrm{w}\,p_0 + \mathrm{x}\,p_1 + \mathrm{y}\,p_2 + \mathrm{z}\,p_3.$$

Nous pouvons exprimer une fonction linéaire quelconque U en fonction de quatre nouveaux quaternions que nous prendrons pour les q savoir :

$$(25) \qquad \mathrm{F}(u) = \mathbf{S}q'_0\eta + i\,\mathbf{S}q'_1\eta + j\,\mathbf{S}q'_2\eta + k\,\mathbf{S}q'_3\eta,$$

nous aurons, en substituant la valeur de la fonction η, la forme cherchée

$$(26) \qquad \mathrm{F}(u) = q_0\,\mathbf{S}p'_0u + q_1\,\mathbf{S}p'_1u + q_2\,\mathbf{S}p'_2u + q_3\,\mathbf{S}p'_3u.$$

qui est une fonction conjuguée de la fonction F *(u)* donnée précédemment, en ce sens qu'elle est exprimée en fonction des mêmes coefficients numériques des mêmes quaternions des p et des q, mais par une association différente de celle des Q. Nous les désignerons par les P, de sorte que l'on aura pour la forme rectangulaire de F *(u)*

$$(27) \qquad \mathrm{F}(u) = \mathbf{S}P'_0u + i\,\mathbf{S}P'_1u + j\,\mathbf{S}P'_2u + \mathbf{S}P'_3u.$$

sous la forme vectorielle explicite, et sous la forme cartésienne implicite, qui s'en déduit immédiatement par le théorème du n° 94.

$$(28) \qquad \mathrm{F}(u) = \mathrm{w}\,P_0 + \mathrm{x}\,P_1 + \mathrm{y}\,P_2 + \mathrm{z}\,P_3.$$

Les P sont des fonctions linéaires de la même forme que $\mathrm{f}(\eta)$ savoir :

$$(29) \qquad \begin{cases} P_i = \mathrm{f}(p_1) = \mathbf{S}q'_0p_i + i\,\mathbf{S}q'_1p_i + j\,\mathbf{S}q'_2p_i + k\,\mathbf{S}q'_3p_i, \\ P'_i = \mathrm{f}'(q_1) = \mathbf{S}p_0q'_i + (i\,\mathbf{S}p_1q'_i + j\,\mathbf{S}p_2q'_i + k\,\mathbf{S}p_3q_i). \end{cases}$$

Ces équations donnent la forme vectorielle des P, et nous

poserons pour ces scalars des 16 quantités numériques, données par les équations (29), les notations suivantes

$$(30)\quad \begin{cases} P_0 = S_0 + i\,L_0 + j\,M_0 + k\,N_0, \\ P_1 = S_1 + i\,L_1 + j\,M_1 + k\,N_1, \\ P_2 = S_2 + i\,L_2 + j\,M_2 + k\,N_2, \\ P_3 = S_3 + i\,L_3 + j\,M_3 + k\,N_3\,; \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} P'_0 = S_0 - (i\,S_1 + j\,S_2 + k\,S_3), \\ P'_1 = L_0 - (i\,L_1 + j\,L_2 + k\,L_3), \\ P'_2 = M_0 - (i\,M_1 + j\,M_2 + k\,M_3), \\ P'_3 = N_0 - (i\,N_1 + j\,N_2 + k\,N_3)\,; \end{cases}$$

et l'application du théorème du n° 94 donnera pour leurs formes cartésiennes implicites les formules

$$(32)\quad \begin{cases} P_0 = s_0 q_0 + l_0 q_1 + m_0 q_2 + n_0 q_3, \\ P_1 = s_1 q_0 + l_1 q_1 + m_1 q_2 + n_1 q_3, \\ P_2 = s_2 q_0 + l_2 q_1 + m_2 q_2 + n_2 q_3, \\ P_3 = s_3 q_0 + l_3 q_2 + m_3 q_2 + n_3 q_3\,; \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} P'_0 = d_0 p'_0 + d_1 p'_1 + d_2 p'_2 + d_3 p'_3, \\ P'_1 = a_0 p'_0 + a_1 p'_1 + a_2 p'_2 + a_3 p'_3, \\ P'_2 = b_0 p'_0 + b_1 p'_1 + b_2 p'_2 + b_3 p'_3, \\ P'_3 = c_0 p'_0 + c_1 p'_1 + c_2 p'_2 + c_3 p'_3. \end{cases}$$

Ces formules nous conduisent directement à la théorie des fonctions linéaires conjuguées.

§ II. Fonctions linéaires conjuguées

98. *Définition.*— On dit que deux fonctions linéaires vectorielles sont conjuguées quand elles résultent de l'échange réciproque des systèmes de quaternions coordonnés. Elles sont par suite formées des mêmes coefficients numériques, mais dans un autre ordre. Telles sont les deux formes

$$(34) \begin{cases} F(u) = p_0 \mathbf{S} q'_0 u + p_1 \mathbf{S} q'_1 u + p_2 \mathbf{S} q'_2 u + p_3 \mathbf{S} q'_3 u, \\ F'(u) = q'_0 \mathbf{S} p_0 u' + q'_1 \mathbf{S} p_1 u' + q'_2 \mathbf{S} p_2 u' + q'_2 \mathbf{S} p_3 u'. \end{cases}$$

Les deux fonctions F et F′ sont deux fonctions que nous pouvons appeler fonctions conjuguées réciproques. D'après la forme de ces deux fonctions, nous voyons immédiatement que nous pouvons considérer deux autres fonctions conjuguées réciproques et conjuguées complémentaires respectivement des précédentes, savoir :

$$35) \begin{cases} \mathbf{F}(u) = q_0 \mathbf{S} p'_0 u + q_1 \mathbf{S} p'_1 u + q_2 \mathbf{S} d'_2 u + q_3 \mathbf{S} p'_3 u, \\ \mathbf{F}'(u) = p'_0 \mathbf{S} q_0 u' + p'_1 \mathbf{S} q'_1 u' + p'_2 \mathbf{S} q_2 u' + p'_3 \mathbf{S} q_3 u'. \end{cases}$$

Nous avons vu qu'une fonction vectorielle du premier degré de la forme la plus générale peut s'exprimer en fonction de quatre quaternions à ternions rectangulaires. Alors deux fonctions conjuguées réciproques dépendent des mêmes 16 coefficients numériques. Nous aurons pour la forme cartésienne implicite des F et F′ les formules

$$(36) \begin{cases} F(u) = \mathrm{w}\, Q_0 + \mathrm{x}\, Q_1 + \mathrm{y}\, Q_2 + \mathrm{z}\, Q_3, \\ F'(u') = \mathrm{w}\, Q'_0 + \mathrm{x}\, Q'_1 + \mathrm{y}\, Q'_2 + \mathrm{z}\, Q'_3, \end{cases}$$

et pour leur forme vectorielle explicite, nous aurons d'une manière inverse et réciproque

$$(37) \begin{cases} F(u) = \mathbf{S} Q'_0 u + i\, \mathbf{S} Q'_1 u + j\, \mathbf{S} Q'_2 u + k\, \mathbf{S} Q'_3 u, \\ F'(u) = \mathbf{S} Q_0 u' + i\, \mathbf{S} Q_1 u' + j\, \mathbf{S} Q_2 u' + k\, \mathbf{S} Q_3 u'. \end{cases}$$

Nous trouverons de la même manière, pour les deux fonctions conjuguées **F** et **F**′, en fonction des P pour leur forme cartésienne rectangulaire

$$(38) \begin{cases} \mathbf{F}(u) = \mathrm{w}\, P_0 + \mathrm{x}\, P_1 + \mathrm{y}\, P_2 + \mathrm{z}\, P_3, \\ \mathbf{F}'(u') = \mathrm{w}\, P'_0 + \mathrm{x}\, P'_1 + \mathrm{y}\, P_2 + \mathrm{z}\, P_3; \end{cases}$$

et pour leur forme vectorielle explicite, par l'application théorème n° 94,

$$(39) \begin{cases} \mathbf{F}(u) = \mathbf{S} P'_0 u + i\, \mathbf{S} P'_1 u + j\, \mathbf{S} P'_2 u + k\, \mathbf{S} P'_3 u; \\ \mathbf{F}'(u) = \mathbf{S} P_0 u' + i\, \mathbf{S} P_1 u' + j\, \mathbf{S} P_2 u' + k\, \mathbf{S} P_3 u'. \end{cases}$$

Il y a donc quatre manières d'exprimer une fonction linéaire d'une variable vectorielle u, en fonction de huit quaternions donnés, et dépendant des mêmes trente deux constantes numériques, savoir : deux fonctions conjuguées réciproques F, et F', qui dépendent des mêmes quaternions Q, et deux autres fonctions conjuguées réciproques **F** et **F'**, qui dépendent des mêmes quaternions P, et que nous avons appelé conjuguées des premières, parce qu'elles dépendent de fonctions complémentaires des $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$, ou des conjugués directs des fonctions linéaires ξ, η.

§ III. — Fonctions linéaires ternions

99. *Définition*. — Si nous supposons maintenant que les Q et Q' deviennent des ternions, la fonction U deviendra indépendante de la variable scalar w. Nous retrouverons les formules de Hamilton et Tait en supprimant la première ligne et la première colonne dans les formules à 4 termes, et tous les quaternions se réduiront à des ternions.

Il faut remarquer cependant qu'en faisant $Q' = 0$ les trois lignes restantes Q_1', Q_2'. Q_3' restent des quaternions tandis que les Q donnent quatre ternions distincts. Donc une fonction $U = F(\rho)$, en posant $\rho = ix + jy + kz$, qui se réduit à une fonction de la variable ternion ρ est encore un quaternion de 4 scalars à trois termes, comme si l'on avait fait $w=0$. Si au contraire on a seulement $Q=0$ les Q' se réduisent à des ternions et l'équation $U = F(\rho)$ est encore indépendante de w, car la forme cartésienne se réduit à trois termes, quelque soit W, puisque par hypothèse $Q_0 = 0$, et la forme vectorielle est un quaternion dans chacun des termes duquel les scalars sont de la forme $SA\rho$, où A est un ternion donné.

Ainsi une fonction vectorielle quaternion $U = F(\rho)$ se réduit à une fonction d'un vecteur de point ternion ρ, soit que l'on ait $w = o$, soit que les vecteurs donnés se réduisent à des ternions, et la variable scalar w disparait encore de tous les termes, quelle que soit sa valeur. C'est ce qui ne pouvait être établi qu'en remontant à la forme générale vectorielle.

100. *Méthode de Hamilton.* — Désignons par α, β, γ, ce que deviennent les q quand on supprime la première ligne et la première colonne dans les formules (20). Désignons de même par λ, μ, ν, ce que deviennent les p, quand on supprime la première ligne et la première colonne dans les formules (19).

Nous aurons en posant $\rho = ix + jy + kz$, pour le vecteur de point, quand on fait $w = o$, dans u, et si nous désignons par $\sigma = f(\rho)$ ce que devient une fonction vectorielle $U = F(u)$ dans les mêmes conditions, nous aurons pour la forme cartésienne implicite

$$(1) \qquad \sigma = \lambda \, \mathbf{S} \alpha' \rho + \mu \, \mathbf{S} \beta' \rho + \nu \, \mathbf{S} \gamma' \rho$$

en désignant toujours α', β', γ', ce que deviennent α, β, γ quand on change les lignes en colonnes, et l'on voit d'après le théorème n° 94 que ce sont des ternions de signes contraires, de sorte que la fonction linéaire σ est un ternion négatif.

Si nous désignons par A, B, C ce que deviennent les Q, quand ils se réduisent à des ternions et par L, M, N ce que deviennent les P, dans les mêmes conditions, nous obtiendrons immédiatement les fonctions linéaires conjuguées ternions, réciproques et complémentaires en fonction de 6 ternions arbitraires coordonnés. Pour plus de commodité nous reproduirons les formules relatives à ce cas particulier, savoir :

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha = i\mathrm{a}_1 + j\mathrm{b}_1 + k\mathrm{c}_1, \\ \beta = i\mathrm{a}_2 + j\mathrm{b}_2 + k\mathrm{c}_2, \\ \gamma = i\mathrm{a}_3 + j\mathrm{b}_3 + k\mathrm{c}_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = i\mathrm{l}_1 + j\mathrm{m}_1 + k\mathrm{n}_1, \\ \mu = i\mathrm{l}_2 + j\mathrm{m}_2 + k\mathrm{n}_2, \\ \nu = i\mathrm{l}_3 + j\mathrm{m}_3 + k\mathrm{n}_3. \end{cases}$$

Nous aurons de la même manière

$$(4)\quad \begin{cases} A = i\mathrm{A}_1 + j\mathrm{B}_1 + k\mathrm{C}_1 = a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu, \\ B = i\mathrm{A}_2 + j\mathrm{B}_2 + k\mathrm{C}_2 = a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu, \\ C = i\mathrm{A}_3 + j\mathrm{B}_3 + k\mathrm{C}_3 = a_3\lambda + b_3\mu + c_3\nu; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} L = i\mathrm{L}_1 + j\mathrm{M}_1 + k\mathrm{N}_1 = l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma, \\ M = i\mathrm{L}_2 + j\mathrm{M}_2 + k\mathrm{N}_2 = l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma, \\ N = i\mathrm{L}_3 + j\mathrm{M}_3 + k\mathrm{N}_3 = l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma. \end{cases}$$

Nous aurons les deux fonctions conjuguées réciproques σ et σ'

$$(6)\quad \begin{cases} \sigma = \lambda\, \mathbf{S}\alpha'\rho + \mu\, \mathbf{S}\beta'\rho + \nu\, \mathbf{S}\gamma'\rho, \\ \sigma' = \alpha' \mathbf{S}\lambda\rho + \beta' \mathbf{S}\mu\rho + \gamma' \mathbf{S}\nu\rho. \end{cases}$$

Elles s'expriment en fonction des A, B, C conjugués inverses des A', B', C', de la manière suivante : savoir, pour la forme vectorielle explicite et rectangulaire

$$(7)\quad \begin{cases} \sigma = i\, \mathbf{S}A'\rho + j\, \mathbf{S}B'\rho + k\mathbf{S}C'\rho, \\ \sigma' = i\, \mathbf{S}A\rho + j\, \mathbf{S}B\rho + k\mathbf{S}C\rho, \end{cases}$$

et pour la forme cartésienne implicite, et rectangulaire

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma = \mathrm{x}\, A + \mathrm{y}\, B + \mathrm{z}\, C, \\ \sigma' = \mathrm{x}\, A' + \mathrm{y}\, B' + \mathrm{z}\, C'. \end{cases}$$

Si nous désignons de même par π et π' les deux autres fonctions conjuguées réciproques, nous aurons

$$(9)\quad \begin{cases} \pi = \lambda' \mathbf{S}\alpha\rho + \mu' \mathbf{S}\beta\rho + \nu' \mathbf{S}\gamma\rho, \\ \pi' = \alpha\, \mathbf{S}\lambda'\rho + \beta\, \mathbf{S}\mu'\rho + \gamma\, \mathbf{S}\nu'\rho, \end{cases}$$

et nous remarquerons que ce sont des ternions positifs. Nous trouverons immédiatement pour leur forme vectorielle explicite rectangulaire

$$(10)\quad \begin{cases} \pi = i\, \mathbf{S}L\rho + j\, \mathbf{S}M\rho + k\, \mathbf{S}N\rho, \\ \pi' = i\, \mathbf{S}L'\rho + j\, \mathbf{S}M'\rho + k\, \mathbf{S}N'\rho, \end{cases}$$

et pour leur forme cartésienne implicite

$$(11) \qquad \begin{cases} \pi = \mathrm{x}\,L' + \mathrm{y}\,M' + \mathrm{z}\,N', \\ \pi' = \mathrm{x}\,L + \mathrm{y}\,M + \mathrm{z}\,N. \end{cases}$$

Nous voyons qu'il y a quatre manières ou 4 ternions conjugués deux à deux, que l'on peut avoir en fonction de 6 ternions donnés arbitrairement ou de 18 quantités numériques d'une même variable ternion de point (ρ). Elles ne dépendent que de 9 coefficients numériques distincts de trois ternions rectangulaires qui sont donnés en fonction des 18 quantités numériques.

Nous pouvons remarquer que cette dualité des vecteurs réciproques provient, comme nous l'avons montré, dans la composition des vecteurs obliques, qu'à tout trièdre oblique (IJK) de ces vecteurs, répond nécessairement un autre trièdre oblique (**IJK**), qui est le conjugué polaire réciproque, et qu'ils ne se confondent que lorsque les directions (I, J, K) sont rectangulaires.

En effet, si nous mettons les ternions en évidence, nous pouvons voir qu'une fonction linéaire ternion est de la forme générale

$$f(\rho) = r_1 r'_1\, \mathrm{I}_1\, \mathbf{S}\mathrm{J}_1\rho + r_2 r'_2\, \mathrm{I}_2\, \mathbf{S}\mathrm{J}_2\rho + r_3 r'_3\, \mathrm{I}_3\, \mathbf{S}\mathrm{J}_3\rho.$$

Les deux trièdres donnés ($\mathrm{I}_1\,\mathrm{I}_2\,\mathrm{I}_3$) et ($\mathrm{J}_1\,\mathrm{J}_2\,\mathrm{J}_3$) pourront être pris obliques ou orthogonaux, ou bien comme les polaires conjugués réciproques, ce qui répond aux différents cas que peut présenter une fonction linéaire ternion. Il en résulte que lorsque le vecteur de point ρ décrit un certain trajet sur une certaine surface, il y a un second vecteur ρ' qui décrit la ligne et la surface conjuguée polaire. Si donc le vecteur de point (ρ) est assujetti à décrire un plan, les fonctions conjuguées f (ρ) et f (ρ') déterminent 4 systèmes de 4 plans dont les paramètres ont la même valeur modulaire, deux à deux, comme nous aurons occasion de le développer dans la théorie

vectorielle du plan, qui est une application géométrique de la théorie vectorielle des équations du premier degré.

101. *Exercices.* — Deux fonctions linéaires conjugués donnent deux vecteurs différents, qui, ajoutés ou retranchés vectoriellement, donnent les grandes et les petites diagonales du parallélogramme construit sur chacun d'eux.

Puisqu'une fonction linéaire et sa conjuguée réciproque s'expriment en fonction de trois ternions conjugués inverses, savoir :

$$\sigma = \mathrm{x}A + yB + zC, \quad \sigma' = \mathrm{x}\ A' + \mathrm{y}\ B' + zC'$$

nous aurons

$$\sigma - \sigma' = \mathrm{x}\ (A - A') + \mathrm{y}\ (B - B') + \mathrm{z}\ (C - C'),$$

et comme ces quaternions ont par hypothèse le même déterminant, les termes de la diagonale disparaissent de l'équation précédente, et en posant pour abréger

$$C_2 - B_3 = \mathbf{A}, \quad A_3 - C_1 = \mathbf{B}, \quad B_1 - A_2 = \mathbf{C},$$

nous aurons simplement

$$\sigma - \sigma' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{vmatrix}.$$

Si donc nous considérons le vecteur constant

$$D = i\mathbf{A} + j\mathbf{B} + k\mathbf{C},$$

nous aurons pour la forme cartésienne implicite

$$\sigma - \sigma' = \mathrm{x}\ \mathbf{T}iD + \mathrm{y}\ \mathbf{T}jD + \mathrm{z}\ \mathbf{T}kD.$$

L'on voit que la condition pour que le vecteur σ' soit conjugué de lui-même, est que le vecteur D soit nul, ou que le déterminant des A, B, C soit symétrique, car alors les A', B', C' ne diffèrent que par le signe de leurs conjugués.

Le produit $\sigma\sigma'$ est un quaternion, qui se réduit à un scalar si les fonctions sont deux vecteurs conjugués.

Comme nous ne cherchons qu'à dégager les principes, nous ne nous arrèterons pas davantage à toutes les combinaisons subtiles et en casse tète que l'on peut présenter comme exercices propres à développer la patience et la sagacité. Nous pensons qu'il est plus utile de montrer la raison d'une transformation analytique, que d'établir des calculs conventionnels et des combinaisons qui vont à l'infini.

§ IV. — Fonction linéaire inverse

102. *Méthode directe.* — La question d'une fonction vectorielle inverse du premier degré est évidemment une question de transformation linéaire, et l'on sait qu'une nouvelle transformation linéaire reproduit la fonction directe par la méthode bien connue des déterminants.

On est étonné de voir Hamilton et Tait établir une théorie si obscure de la fonction inverse du premier degré. Ce n'est d'ailleurs qu'en restreignant la question à des ternions, en réalité pris rectangulaires entre eux, que les cas où elle s'applique ne sont pas illusoires. Dans une fonction quaternion, qui n'est autre chose qu'une exponentielle linéaire, la fonction inverse proprement dite est un arc ou plus généralement un logarithme, qui ne lui est pas algébriquement réciproque, et celle-ci demande un algorithme tout différent. Dans le cas d'une fonction du premier degré, la fonction inverse du premier degré se déduit bien algébriquement de la fonction directe, mais les coefficients ne sont pas les mêmes, et il est illusoire de poser $\varphi^{-1}(\gamma) = \rho$, si l'on établit pas directement la forme de $\varphi^{-1}(\gamma)$.

La cubique que ces auteurs déduisent n'est pas aussi simple que ces auteurs paraissent le supposer, à cause de l'ordre des facteurs vectoriels. D'ailleurs la cubique caractéristique

d'équations linéaires simultanées se retrouve dans toutes les questions algébriques linéaires dont les seconds membres sont respectivement proportionnels à chacune des variables numériques d'un vecteur de point ternion, et il y a en général trois valeurs distinctes qui satisfont au même système simultané, soit qu'il s'agisse de la caractéristique de trois équations différentielles linéaires à coefficients constants, soit qu'il s'agisse de la détermination des axes d'une surface du second ordre, soit qu'il s'agisse, comme ici, de déterminer les paramètres de trois fonctions de point conjuguées d'une fonction linéaire ternion.

D'après la forme d'une fonction vectorielle du premier degré, dépendant d'un vecteur de point

$$u = \mathrm{w} + i\mathrm{x} + j\mathrm{y} + k\mathrm{z}, \tag{1}$$

l'expression générale explicite $U = \mathrm{F}(u)$ d'une telle fonction peut toujours se mettre sous la forme coordonnée vectorielle

$$U = \mathrm{W} + i\mathrm{X} + j\mathrm{Y} + k\mathrm{Z}, \tag{2}$$

où les paramètres W, X, Y, Z sont, comme nous l'avons vu, quatre fonctions homogènes du premier degré, et qui dépendent par suite de 16 coefficients numériques constants au plus savoir :

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{W} = \mathrm{D}_0\,\mathrm{w} + \mathrm{D}_1\,\mathrm{x} + \mathrm{D}_2\,\mathrm{y} + \mathrm{D}_3\,\mathrm{z}, \\ \mathrm{X} = \mathrm{A}_0\,\mathrm{w} + \mathrm{A}_1\,\mathrm{x} + \mathrm{A}_2\,\mathrm{y} + \mathrm{A}_3\,\mathrm{z}, \\ \mathrm{Y} = \mathrm{B}_0\,\mathrm{w} + \mathrm{B}_1\,\mathrm{x} + \mathrm{B}_2\,\mathrm{y} + \mathrm{B}_3\,\mathrm{z}. \\ \mathrm{Z} = \mathrm{C}_0\,\mathrm{w} + \mathrm{C}_1\,\mathrm{x} + \mathrm{C}_2\,\mathrm{y} + \mathrm{C}_3\,\mathrm{z}. \end{cases}$$

C'est-à-dire, que nous pouvons écrire la fonction vectorielle sous les deux formes équivalentes

$$(4)\quad \begin{cases} U = \mathbf{S}Q'_0u + i\,\mathbf{S}Q'_1u + j\,\mathbf{S}Q'_2u + k\,\mathbf{S}Q'_3u, \\ U = \mathrm{w}\,Q_0 + \mathrm{x}\,Q_1 + \mathrm{y}\,Q_2 + \mathrm{z}\,Q_3, \end{cases}$$

suivant que l'on ordonne l'équation suivant les coordonnées

vectorielles, ou suivant les composantes scalars du vecteur de point u.

Si nous désignons maintenant par de petites lettres correspondantes les déterminants mineurs du déterminant des seconds membres des équations (3), $\Delta = (D_0\, A_1\, B_2\, C_3)$, nous aurons en résolvant par rapport aux composantes (W, X, Y, Z) du vecteur de point u, les équations

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta\, \mathrm{w} = \mathrm{W}\, \mathbf{d}_0 + \mathrm{X}\, \mathbf{a}_0 + \mathrm{Y}\, \mathbf{b}_0 + \mathrm{Z}\, \mathbf{c}_0, \\ \Delta\, \mathrm{x} = \mathrm{W}\, \mathbf{d}_1 + \mathrm{X}\, \mathbf{a}_1 + \mathrm{Y}\, \mathbf{b}_1 + \mathrm{Z}\, \mathbf{c}_1, \\ \Delta\, \mathrm{y} = \mathrm{W}\, \mathbf{d}_2 + \mathrm{X}\, \mathbf{a}_2 + \mathrm{Y}\, \mathbf{b}_2 + \mathrm{Z}\, \mathbf{c}_2, \\ \Delta\, \mathrm{z} = \mathrm{W}\, \mathbf{d}_3 + \mathrm{X}\, \mathbf{a}_3 + \mathrm{Y}\, \mathbf{b}_3 + \mathrm{Z}\, \mathbf{c}_3\, ; \end{cases}$$

et si nous posons pour abréger

$$(6)\quad \begin{cases} \mathbf{D} = \mathbf{d}_0 + i\, \mathbf{d}_1 + j\, \mathbf{d}_2 + k\, \mathbf{d}_3, \\ \mathbf{A} = \mathbf{a}_0 + i\, \mathbf{a}_1 + j\, \mathbf{a}_2 + k\, \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{B} = \mathbf{b}_0 + i\, \mathbf{b}_1 + j\, \mathbf{b}_2 + k\, \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{C} = \mathbf{c}_0 + i\, \mathbf{c}_1 + j\, \mathbf{c}_2 + k\, \mathbf{c}_3\, ; \end{cases}$$

nous trouverons immédiatement pour la fonction inverse

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta\, u = \mathrm{W}\mathbf{D} + \mathrm{X}\mathbf{A} + \mathrm{Y}\mathbf{B} + \mathrm{Z}\mathbf{C}, \\ \text{ou}\quad \Delta\, u = \mathbf{SD}'U + i\, \mathbf{SA}'U + j\, \mathbf{SB}'U + k\, \mathbf{SC}'U, \end{cases}$$

en se rappelant d'après le théorème du n° 94, que les $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}'$ sont toujours les quaternions conjugués inverses du système (6). En effet, d'après la théorie des déterminants, la somme des produits des déterminants mineurs par les éléments correspondants donne le déterminant total Δ, tandis que la somme des produits des déterminants mineurs par les éléments non correspondants donne une somme nulle et on voit que les scalars $\mathbf{SD}'U$, etc, se réduisent respectivement à $\Delta \mathrm{w}$, etc.

103. *Méthode de Hamilton.* — La méthode rationnelle de Hamilton, par l'emploi des ternions conjugués polaires, est au fond une méthode de transformation linéaire, aussi

est-elle applicable directement à une fonction quaternion. Cette méthode a l'avantage sur celle des fonctions répétées de montrer les propriétés géométriques des vecteurs complexes ainsi que le mécanisme purement algébrique de la fonction inverse du premier degré. Si donc nous posons, d'après le mode de notation précédente, pour les déterminants mineurs premiers. des petites lettres correspondant aux grandes lettres des éléments, et inversement des grandes lettres correspondant aux petites lettres des éléments, nous aurons relativement au système des huits quaternions qui entrent dans la forme générale d'une fonction vectorielle du premier degré, et que nous avons désigné par les p et les q, le système suivant

$$(8)\quad \begin{cases} \mathbf{p}_0 = \mathbf{S}_0 + i\,\mathbf{S}_1 + j\,\mathbf{S}_2 + k\,\mathbf{S}_3. \\ \mathbf{p}_1 = \mathbf{L}_0 + i\,\mathbf{L}_1 + j\,\mathbf{L}_2 + k\,\mathbf{L}_3, \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{M}_0 + i\,\mathbf{M}_1 + j\,\mathbf{M}_2 + k\,\mathbf{M}_3, \\ \mathbf{p}_3 = \mathbf{N}_0 + i\,\mathbf{N}_1 + j\,\mathbf{N}_2 + k\,\mathbf{N}_3\,; \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \mathbf{q}_0 = \mathbf{D}_0 + i\,\mathbf{D}_1 + j\,\mathbf{D}_2 + k\,\mathbf{D}_3, \\ \mathbf{q}_1 = \mathbf{A}_0 + i\,\mathbf{A}_1 + j\,\mathbf{A}_2 + k\,\mathbf{A}_3, \\ \mathbf{q}_2 = \mathbf{B}_0 + i\,\mathbf{B}_1 + j\,\mathbf{B}_2 + k\,\mathbf{B}_3, \\ \mathbf{q}_3 = \mathbf{C}_0 + i\,\mathbf{C}_1 + j\,\mathbf{C}_2 + k\,\mathbf{C}_3. \end{cases}$$

On observera que la substitution linéaire se fait par la substitution conjuguée inverse, comme il résulte de l'inspection du tableau précédent. Les éléments des seconds membres sont respectivement les déterminants mineurs premiers des p et des q, que nous avons exprimé précédemment § I, (19 et 20), par de petites lettres.

Cela posé, soit la fonction $U = \mathrm{F}\,(u)$, savoir :

$$(10)\quad U = p_0\,\mathbf{S}q'_0u + p_1\,\mathbf{S}q'_1u + p_2\,\mathbf{S}q'_2u + p_3\,\mathbf{S}q'_3u,$$

nous trouverons immédiatement pour la fonction inverse

$$(11)\quad \Delta_p\Delta_q u = \mathbf{q}_0\,\mathbf{Sp}'_0U + \mathbf{q}_1\,\mathbf{Sp}'_1U + \mathbf{q}_2\,\mathbf{Sp}'_2U + \mathbf{q}_3\,\mathbf{Sp}'_3U.$$

En effet si nous multiplions l'équation proposée (10) par

les $\mathbf{p}'$ et que nous prenions les scalars, trois termes disparaissent comme étant nuls et il reste

$$(12)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\mathbf{p}'_0 U = \Delta_\mathbf{p}\, \mathbf{S}q'_0 u, \\ \mathbf{S}\mathbf{p}'_1 U = \Delta_\mathbf{p}\, \mathbf{S}q'_1 u, \\ \mathbf{S}\mathbf{p}'_2 U = \Delta_\mathbf{p}\, \mathbf{S}q'_2 u, \\ \mathbf{S}\mathbf{p}'_3 U = \Delta_\mathbf{p}\, \mathbf{S}q'_3 u. \end{cases}$$

Si maintenant nous ajoutons les équations (12) respectivement multipliées par les $\mathbf{q}$, en observant que par la théorie des déterminants nous avons

$$(13)\quad \mathbf{q}_0\, \mathbf{S}q'_0 u + \mathbf{q}_1\, \mathbf{S}q'_1 u + \mathbf{q}_2\, \mathbf{S}q'_2 u + \mathbf{q}_3\, \mathbf{S}q'_3 u = \Delta_\mathbf{q} u.$$

qui est une manière d'exprimer une fonction réciproque d'elle-même, nous trouvons la relation (11), qui résout algébriquement la question de la fonction inverse.

On en conclut que l'on obtiendra pour la fonction inverse quatre formes différentes, en prenant pour la fonction directe l'une des quatres fonctions conjuguées F, F′ et **F**, **F**′, que nous avons définies précédemment.

Il sera facile de passer du cas général d'une fonction quaternion aux cas particuliers d'une fonction ternion, en supprimant la première ligne et la première colonne des p et des q, ce qui fait disparaître la première ligne et la première colonne des $\mathbf{p}$ et des $\mathbf{q}$, et qui réduit ces derniers éléments à des fonctions binômes, qui sont les ternions conjugués polaires des ternions des p et des q.

Nous voyons de la même manière, qu'il y a quatre manières d'exprimer la fonction inverse ρ d'une fonction ternion, en fonction des quatre fonctions conjuguées que nous avons désignées par σ, σ' et π, π', qui sont ce que deviennent les fonctions F, F′ et **F**, **F**′ quand elles se réduisent à des fonctions ternions du vecteur de point ρ.

Nous laisserons au lecteur le soin de développer ces cas particuliers.

§ V. — Fonctions linéaires répétées

104. *Cas des vecteurs ternions.* — Une fonction linéaire du premier degré la plus générale étant prise sous la forme

(1) $\delta = f(\rho) = \alpha\, S\lambda'\rho + \beta\, S\mu'\rho + \gamma\, S\nu'\rho,$

comme le vecteur de point ρ est complètement arbitraire, bien que nous verrons plus loin, que la relation du premier degré (1) l'assujettisse à se trouver sur un système de trois plans dont les paramètres sont donnés par les vecteurs donnés et constants, nous aurons, en prenant δ pour vecteur de point, la même équation

(2) $\epsilon = f(\delta) = f^2(\rho) = \alpha\, S\lambda'\delta + \beta\, S\mu'\delta + \gamma\, S\nu'\delta,$

où nous avons écrit $f^2(\rho)$ pour $f.(f\rho)$ pour abréger.

Substituons la valeur de δ tirée de la première équation, nous trouverons, tous réductions faites,

(3) $\epsilon = f(\alpha)\, S\lambda'\rho + f(\beta)\, S\mu'\rho + f(\gamma)\, S\nu'\rho,$

que nous pouvons écrire sous la forme

(4) $\epsilon = \alpha_1\, S\lambda'\rho + \beta_1\, S\mu'\rho + \gamma_1\, S\nu'\rho,$

où les vecteurs α_1, β_1, γ_1 sont déterminés en fonctions linéaires de la même forme des vecteurs donnés, α, β, γ, et λ', μ', ν', de la manière suivante

(5) $\alpha_1 = f(\alpha) = \alpha\, S\lambda'\alpha + \beta\, S\mu'\alpha + \gamma\, S\nu'\alpha,$

et ainsi de suite pour les autres vecteurs.

Nous trouvons en opérant de la même manière

(6) $\zeta = f(\epsilon) = f^3(\rho) = f^2(\alpha)\, S\lambda'\rho + f^2(\beta)\, \mu'\rho + f^2(\gamma)\, S\nu'\rho,$

que nous pouvons écrire

(7) $\zeta = \alpha_2\, S\lambda'\rho + \beta_2\, S\mu'\rho + \gamma_2\, S\nu'\rho,$

en désignant suivant la même méthode par $f^2(\alpha)$ la fonction linéaire

(8) $\alpha_2 = \alpha\,\mathbf{S}\lambda' f(\alpha) + \beta\,\mathbf{S}\mu' f(\alpha) + \gamma\,\mathbf{S}\nu' f(\alpha)$, etc.,

et enfin généralement

(9) $\left\{ \begin{array}{l} f^{n+1}(\rho) = f^n(\alpha)\,\mathbf{S}\lambda'\rho + f^n(\beta)\,\mathbf{S}\mu'\rho + f^n(\gamma)\,\mathbf{S}\nu'\rho, \\ \text{ou} \quad f^{n+1}(\rho) = \alpha_n\,\mathbf{S}\lambda'\rho + \beta_n\,\mathbf{S}\mu'\rho + \gamma_n\,\mathbf{S}\nu'\rho. \end{array} \right.$

Les α_n, β_n, γ_n sont ainsi déterminés en fonction des 6 vecteurs ternions donnés, comme paramètres.

On en conclut que l'on peut exprimer une fonction linéaire ternion en fonction de trois fonctions répétées consécutives, et posant par exemple

(10) $\sigma = m_1\delta + m_2\varepsilon + m_3\zeta = m_1 f(\rho) + m_2 f^2(\rho) + m_3 f^3(\rho)$,

nous aurons donc le système linéaire simultané

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = m_1 f(\alpha) + m_2 f^2(\alpha) + m_3 f^3(\alpha) = m_1\alpha_1 \\ \qquad + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3. \\ \beta_0 = m_1 f(\beta) + m_2 f^2(\beta) + m_3 f^3(\beta) = m_1\beta_1 \\ \qquad + m_2\beta_2 + m_3\beta_3, \\ \gamma_0 = m_1 f(\gamma) + m_2 f^2(\gamma) + m_3 f^3(\gamma) = m_1\gamma_1 \\ \qquad + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3, \end{array} \right.$$

qui montre que les valeurs des *m* sont déterminées et uniques, et la fonction linéaire quelconque σ prendra la forme

(12) $\sigma = \alpha_0\,\mathbf{S}\lambda'\rho + \beta_0\,\mathbf{S}\mu'\rho + \gamma_0\,\mathbf{S}\nu'\rho$.

Si donc nous faisons

$$\sigma = \rho = \alpha_0\,\mathbf{S}\lambda\rho + \beta_0\,\mathbf{S}\mu\rho + \gamma_0\,\mathbf{S}\nu\rho,$$

nous devrons poser

$$\alpha_0 = \frac{\mathbf{T}\mu\nu}{\mathbf{S}\lambda\mu\nu}, \quad \beta^0 = \frac{\mathbf{T}\nu\lambda}{\mathbf{S}\lambda\mu\nu}, \quad \gamma_0 = \frac{\mathbf{T}\lambda\mu}{\mathbf{S}\lambda\mu\nu},$$

puisque l'on a en effet

(13) $-\rho\,\mathbf{S}\lambda\mu\nu = \mathbf{T}\mu\nu.\,\mathbf{S}\lambda\rho + \mathbf{T}\nu\lambda.\,\mathbf{S}\mu\rho + \mathbf{T}\lambda\mu.\,\mathbf{S}\nu\rho$.

Du reste en supprimant les modules et en faisant les ternions rectangulaires, elle est équivalente à la forme,

$$\rho = i\,\mathbf{S}i\rho + j\,\mathbf{S}j\rho + k\,\mathbf{S}k\rho,$$

puisque $ijk = -1$, et $ijk = i$, etc., comme nous l'avons vu, dans la première partie.

Nous aurons alors l'équation, dite cubique, de Hamilton

$$(14) \qquad \rho = m_1 f^1(\rho) + m_2 f^2(\rho) + m_3 f^3(\rho).$$

Mais encore une fois, elle suppose que l'on ait trouvé la forme (13) qui est un cas particulier de la fonction linéaire inverse.

105. *Cas général.* — Il sera facile, d'après la théorie des fonctions inverses, de passer du cas particulier d'une fonction linéaire ternion, à une fonction linéaire vectorielle quelconque. La marche est absolument la même que dans le numéro précédent.

Si nous avons généralement

$$(15) \qquad U = p_0 \mathbf{S} q'_0 u + p_1 \mathbf{S} q'_1 u + p_2 \mathbf{S} q'_2 u + p_3 \mathbf{S} q'_3 u,$$

où les p et les q sont 8 quaternions donnés, nous pourrons poser de la même manière

$$(16) \quad U_1 = \mathbf{F}(u) = p_0 \mathbf{S} q'_0 U + p_1 \mathbf{S} q'_1 U + p_2 \mathbf{S} q'_2 U + p_3 \mathbf{S} q'_3 U.$$

En substituant la valeur précédente (15) de U, nous trouverons

$$(17) \qquad U_1 = \mathbf{F}^2(u) = \mathbf{F}(p_0) \mathbf{S} q'_0 u + \mathbf{F}(p_1) \mathbf{S} q'_1 u \\ + \mathbf{F}(p_2) \mathbf{S} q'_2 u + \mathbf{F}(p_3) \mathbf{S} q'_3 u,$$

et généralement

$$(18) \qquad U_n = \mathbf{F}^{n+1}(u) = \mathbf{F}^n(p_0) \mathbf{S} q'_0 u + \mathbf{F}^n(p_1) \mathbf{S} q'_1 u \\ + \mathbf{F}^n(p_2) \mathbf{S} q'_2 u + \mathbf{F}^n(p_3) \mathbf{S} q'_3 u.$$

On en conclut que l'on peut exprimer une fonction linéaire vectorielle en fonction de quatre fonctions répétées consécutives, en posant par exemple

$$(19) \qquad U_0 = m_1 U_1 + m_2 U_2 + m_3 U_3 + m_4 U_4,$$

et nous aurons, pour déterminer les m, un système linéaire simultané :

$$(20)\begin{cases} \mathbf{F}^0(p_0) = m_1\mathbf{F}^1(p_0) + m_2\mathbf{F}^2(p_0) + m_3\mathbf{F}^3(p_0) + m_4\mathbf{F}^4(p_0), \\ \mathbf{F}^0(p_1) = m_1\mathbf{F}^1(p_1) + m_2\mathbf{F}^2(p_1) + m_3\mathbf{F}^2(p_1) + m_4\mathbf{F}^4(p_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si donc nous faisons $U = u$, nous aurons d'après la formule (13) du paragraphe précédemment les valeurs nécessaires : $\Delta_p\,(\mathbf{F}'p_1) = \mathbf{p}_0\ \Delta_p\,(\mathbf{F}'p_1) = \mathbf{p}_1$, etc., ce qui donne la valeur de la fonction inverse conjuguée d'elle-même :

$$(21)\quad \Delta_p\, u = \mathbf{p}_0\, \mathbf{S}p'_0 u + \mathbf{p}_1\, \mathbf{S}p'_1 u + \mathbf{p}_2\, \mathbf{S}p'_2 u + \mathbf{p}_3\, \mathbf{S}p'_3 u,$$

et nous aurons

$$(22)\quad u = m_1\,\mathbf{F}\,(U) + m_2\,\mathbf{F}^2\,(U) + m_3\,\mathbf{F}^3\,(U) + m_4\,\mathbf{F}^4\,(U),$$

où les m sont déterminés par le système simultané des (20). Mais encore une fois, cette formule suppose que l'on ait trouvé la forme de la fonction inverse, dont la forme (21) n'est qu'un cas particulier ou le système des q devient le système conjugué des p, et en supprimant les modules et supposant pour abréger les vecteurs $\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3$ rectangulaires, on retrouvera la formule

$$u = \mathbf{S}u - (i\,\mathbf{S}iu + j\,\mathbf{S}ju + k\mathbf{S}ku),$$

pour l'expression d'un vecteur de point quelconque, quand on connaît les composantes scalars coordonnées.

§ VI. — Théorèmes sur les vecteurs du premier degré

106. *Théorème I,* — De l'équation $\Sigma\, m\,(U\text{-}Q) = o$. « Quand on augmente une suite de vecteurs donnés Q proportionnellement à une quantité numérique m, le vecteur résultant U, ou la somme vectorielle $\Sigma\, m\, Q$, de tous ces vecteurs sera un vecteur U, augmenté proportionnellement à la somme algébrique Σm de ces nombres. »

Considérons d'abord le cas de deux vecteurs Q_1 et Q_2, rapportés à une origine et à un plan scalar communs, en un mot liés entre eux par une relation analytique telle que

$$(1) \qquad P = Q_2 - Q_1,$$

P est le vecteur qui joint l'extrémité des deux autres.

Menons de l'origine O un troisième vecteur U qui divise le vecteur P en deux segments P′ et P″, proportionnels à m_1 et à m_2, de telle sorte que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{P'}{P''} = \frac{m_1}{m_2}$$

où m_1 et m_2 sont des quantités modulaires qui expriment le rapport des modules de deux vecteurs parallèles. Nous avons d'ailleurs par définition

$$(3) \qquad P' + P'' = P,$$

d'où
$$\frac{P' + P''}{P''} = \frac{P}{P''} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

Remplaçant P par sa valeur vectorielle $Q_2—Q_1$, nous aurons

$$(4) \qquad Q_2—Q_1 = \frac{m + m_2}{m_2} P''.$$

Mais nous avons par construction vectorielle

$$(5) \qquad U = Q_1 - P'' = Q_2 - P',$$

d'où en éliminant P″, il vient définitivement

$$(6) \qquad U = \frac{m_1 Q_1 + m_2 Q_2}{m_1 + m_2}$$

Si nous considérons un troisième vecteur Q_3 issu du même point O, et que l'extrémité de U nous menions un vecteur R, nous en déduirons un vecteur U_1 qui divise ce vecteur dans le rapport $\frac{m_1 + m_2}{m}$, et nous trouverons de la même manière

$$(7) \qquad U_1 = \frac{m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + m_3 Q_3}{m + m_2 + m_3},$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un dernier vecteur (8) $U = \frac{\Sigma m\ Q}{\Sigma m}$ et nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$\Sigma m\,(U - Q) = o.$$

L'on sait que si l'on considère des masses m situées à l'extrémité des Q, et qu'on désigne par U le vecteur déterminé comme précédemment à l'extrémité duquel se trouve une masse Σm, ce point sera le centre de gravité de ces masses; et si l'on prend le point (U) pour origine on aura l'équation de condition

$$(9) \qquad \Sigma m\, Q = o.$$

Cette équation linéaire vectorielle exprime que le contour polygonal des vecteurs Q augmentés proportionnellement à m, est fermé sur lui-même, et un terme quelconque est la résultante vectorielle de tous les autres.

107. *Théorème II.* — « Une somme vectorielle $U = \Sigma x\ Q$, où les x sont des indéterminées numériques, ne peut dépendre que de quatre indéterminées indépendantes. »

En effet, un quaternion variable U ne peut dépendre que de quatre variables cartésiennes.

Nous pouvons toujours ramener cette somme à une somme de quatre termes coordonnés de la forme

$$(10) \qquad U = \mathbf{S}P'_0 u + i\,\mathbf{S}P'_1 u + j\,\mathbf{S}P'_2 u + k\,\mathbf{S}P'_3 u,$$

en fonction d'un vecteur de point vectoriel

$$u = w + ix + jy + kz.$$

Chacun des vecteurs Q peut se décomposer suivant les 4 directions arbitraires des P_1 et nous aurons

$$(11) \qquad Q = m_0 P_0 + m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3,$$

où les m sont déterminés. Il en résulte les équations de condition

(12) $w = \Sigma\, m_0 x,\ x = \Sigma\, m_1 x,\ y = \Sigma m_2 x,\ z = \Sigma m_3 x.$

Ces quatre équations déterminent quatre des indéterminées x, qui ne sont plus arbitraires. Il en résulte que la fonction linéaire $U = \Sigma x Q$ reste indéterminée quand le nombre de ses termes est supérieur à quatre. Cela est conforme au nombre de conditions nécessaires pour déterminer un contour polygonal, et au-delà d'un quadrilatère gauche, ou d'un tétraèdre, la forme polygonale peut prendre une infinité de positions satisfaisant à l'équation linéaire indéterminée.

108. — *Equations de la forme* $\Sigma m Q = 0$.

1° Equations à deux termes. — $m_1 Q_1 + m_2 Q_2 = 0$.

Si m_1 et m_2 sont des indéterminées numériques, ou si nous avons l'équation

$$x\, Q_1 + y\, Q_2 = 0,$$

cette équation exprime simplement que ces deux vecteurs sont parallèles. En effet puisque leur rapport $\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{y}{x}$ est une quantité réelle, les deux vecteurs sont parallèles, et ce rapport est celui de leurs modules.

Si l'on a la condition $m_1 + m_2 = 0$, on a simplement $Q_1 = Q_2$, quelles que soient les valeurs des indéterminées.

Si ce rapport, au lieu d'être l'unité, a une valeur déterminée k, on a l'équation linéaire

$$Q_1 + kQ_2 = 0,$$

qui n'a rien d'arbitraire, et qui exprime que le second vecteur, augmenté proportionnellement à k, est égal et de signe contraire au premier.

2° Equations homogènes à trois termes

$$x\, Q_1 + y\, Q_2 + z\, Q_3 = 0.$$

Si nous avons la condition algébrique $x + y + z = o$, l'élimination de l'une des indéterminées, z par exemple, donnera l'équation à deux termes

$$x\,(Q_1 - Q_3) + y\,(Q_2 - Q_3) = o,$$

dans laquelle le rapport des inconnues est déterminé, et qui rentre dans le cas exprimé précédemment, car si nous posons

$$Q_1 - Q_3 = P_1, \quad Q_2 - Q_3 = P_2,$$

l'équation $x\,P_1 + y\,P_2 = o$ exprime le rapport numérique ou modulaire de deux vecteurs parallèles. On en conclut que les extrémités des vecteurs Q_1, Q_2, Q_3, rapportés à une même origine et à un plan scalar commun, sont en ligne droite. Les quaternions donnés ne sont pas tous arbitraires.

Nous pouvons encore considérer l'équation homogène à trois termes, comme un cas particulier de l'équation $\Sigma m\,(U - Q) = o$, où l'on a, soit $\Sigma m = o$, soit $U = o$. Nous venons de considérer le premier cas. Dans le second cas, elle exprime que les vecteurs augmentés proportionnellement à m_1, m_2, m_3 respectivement forment un contour polygonal fermé et sont par suite dans un même plan.

3° Soit l'équation homogène à quatre termes

$$w\,Q_0 + x\,Q_1 + y\,Q_2 + z\,Q_3 = o.$$

Si les quatre vecteurs sont coinitiaux, elle exprime que ces quatre vecteurs ont leurs extrémités sur un même plan.

Si nous avons la condition algébrique $x + y + z + w = o$, le rapport des inconnues est déterminé, et nous pouvons la mettre sous la forme

$$x\,(Q_1 - Q_0) + y\,(Q_2 - Q_0) + z\,(Q_3 - Q_0) = o,$$

que nous pouvons écrire

$$x\,P_1 + y\,P_2 + z\,P_3 = o,$$

et les trois vecteurs, respectivement multipliés par x, y, z, sont dans un même plan.

Nous pouvons considérer cette équation comme le cas particulier de l'équation $\Sigma m\ (U-Q) = o$. Nous venons d'examiner le cas de $\Sigma m = o$; et dans le cas de $U = o$, elle exprime alors que le quadrilatère gauche des quatre vecteurs est fermé.

Enfin l'équation linéaire à 5 termes exprime l'équation générale du premier degré, dans laquelle le rapport des indéterminées est déterminé. Dans le cas contraire, elle exprimera un contour polygonal fermé, quelque soit le nombre de ses termes, en faisant $U=o$ dans l'équation générale $\Sigma m\ (U-Q)=o$.

109. *Lemme.* — Si nous désignons par F *(u)* une fonction du premier degré du vecteur de point u, et par F′ *(u)* la fonction conjuguée réciproque, c'est-à-dire résultant de la permutation des quaternions coordonnés ; soit v un autre verseur de point tel que l'on ait

$$\begin{cases} u = w + ix + jy + kz, \\ v = w' + ix' + jy' + kz' ; \end{cases}$$

nous aurons évidemment

$$\text{et de même} \quad \begin{cases} \mathbf{S}u\ \mathrm{F}\ (v) = \mathbf{S}v\ \mathrm{F}'\ (u) \\ \mathbf{S}v\ \mathrm{F}\ (u) = \mathbf{S}u\ \mathrm{F}'\ (v), \end{cases}$$

comme il est facile de s'en assurer directement, en exécutant les opérations. En effet, bien que l'ordre des opérations soit distinct, comme il s'agit de scalars, l'ordre est indifférent, et le résultat est le même dans les deux membres. Il en serait de même pour les fonctions conjugués réciproques **F** et **F**′ définies précédemment, et l'on aura de la même manière

$$\begin{cases} \mathbf{S}u\ \mathbf{F}\ (v) = \mathbf{S}v\ \mathbf{F}'\ (u), \\ \mathbf{S}v\ \mathbf{F}\ (u) = \mathbf{S}u\ \mathbf{F}'\ (v). \end{cases}$$

Il sera facile de passer du cas général des fonctions quaternions aux fonctions ternions, en supprimant dans les termes

scalars des vecteurs de point u et v, un des quaternions donnés des p et des q. C'est le seul cas qui ait été examiné par Hamilton.

Ce Lemme ne constitue pas une nouvelle relation analytique, mais seulement une identité. Son emploi est très élégant dans les transformations linéaires, mais nous ne pensons pas, qu'il puisse conduire directement à la transformation linéaire inverse. M. Plair en a fait une application très curieuse à la réduction d'une fonction vectorielle du premier degré.

110. *Théorème III.* — « Quand les indéterminées scalars d'une somme vectorielle sont données en fonction d'un même vecteur de point, on peut toujours ramener cette somme à une somme de quatre termes coordonnés, dans le cas d'une fonction quaternion, et à une somme de trois termes dans le cas d'une fonction vectorielle ternion. »

Examinons le cas d'une somme ternion, tel qu'il a été résolu par M. Plair.

Soit une somme linéaire ternion

$$(1) \qquad \varphi(\rho) = \alpha\, \mathbf{S}\beta\rho + \alpha_1\, \mathbf{S}\beta_1\rho + \cdots = \Sigma\alpha\, \mathbf{S}\beta\rho,$$

où les ternions $\alpha, \beta \ldots$, sont donnés. Nous pouvons toujours la ramener à une somme vectorielle ne dépendant que de 6 vecteurs ternions constants :

$$(2) \qquad \varphi(\rho) = \lambda\, \mathbf{S}\lambda_1\rho + \mu\, \mathbf{S}\mu_1\rho + \nu\, \mathbf{S}\nu_1\rho.$$

Cette démonstration est fondée sur la relation identique

$$(3) \qquad \mathbf{S}\sigma\, \varphi'(\rho) = \mathbf{S}\rho\, \varphi(\sigma).$$

En effet nous avons identiquement

$$(4) \qquad \rho\, \mathbf{S}\lambda\mu\nu = \lambda\, \mathbf{S}\mu\nu\rho + \mu\, \mathbf{S}\nu\lambda\rho + \mathbf{S}\lambda\mu\rho,$$

où λ, μ, ν, sont des vecteurs ternions arbitraires.

Si donc nous posons

$$(5)\quad \begin{cases} S\mu\nu\,\varphi(\rho) = S\rho\,\varphi'(T\mu\nu) = S\rho\lambda_1\,S\lambda\mu\nu, \\ S\nu\lambda\,\varphi(\rho) = S\rho\,\varphi'(T\nu\lambda) = S\rho\mu_1\,S\lambda\mu\nu, \\ S\lambda\mu\,\varphi(\rho) = S\rho\,\varphi'(T\lambda\mu) = S\rho\nu_1\,S\lambda\mu\nu. \end{cases}$$

Nous aurons en définissant le système des vecteurs λ_1, μ_1, ν_1, les formules

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda_1\,S\lambda\mu\nu = \varphi'(T\nu\mu) = \Sigma\beta\,S\alpha\mu\nu, \\ \mu_1\,S\lambda\mu\nu = \varphi'(T\nu\lambda) = \Sigma\beta\,S\alpha\nu\lambda, \\ \nu_1\,S\lambda\mu\nu = \varphi'(T\lambda\mu) = \Sigma\beta\,S\alpha\lambda\mu, \end{cases}$$

et cela quelque soit le nombre des termes renfermés sous le signe Σ. Nous aurons ainsi l'équatipn cherchée (2). Les vecteurs λ, μ, ν, sont arbitraires, et les λ_1, μ_1, ν_1 dépendent de ces trois vecteurs et des vecteurs donnés α_1, α_2 ... β_1, β_2..., suivant des relations déterminées.

Il n'est pas difficile de voir que cette méthode est immédiatement applicable à une somme de quaternions de la forme

$$(7)\quad F(u) = P_1\,SQ'_1\,u + P_2\,SQ'_2\,u + \cdots = \Sigma P\,SQ'u,$$

et nous pouvons toujours ramener cette somme à une fonction linéaire quaternion à quatre termes, ne dépendant que de 8 quaternions et de la forme

$$(8)\quad F(u) = p_0\,Sq'_0u + p_1\,Sq'_1u + p_2\,Sq'_2u + p_3\,Sq'_3u,$$

en nous fondant toujours sur la relation identique

$$(9)\qquad Sv\,F'(u) = Su\,F(v).$$

Nous avons également la relation identique

$$(10)\quad \Delta_p\,F(u) = p_0\,Sp'_0\,F(u) + p_1\,Sp'_1\,F(u) + p_2\,Sp'_2\,F(u) + p_3\,Sp'_3\,F(u),$$

en désignant par les $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ les quaternions des mineurs des p, (§ IV, 8), et en ayant égard à la substitution conjuguée inverse.

Si donc nous posons

$$(11)\quad \begin{cases} \mathbf{Sp}'_0\,\mathbf{F}\,(u) = \mathbf{S}u\,\mathbf{F}'\,(\mathbf{p}'_0) = \mathbf{S}u\,\Sigma Q\,\mathbf{S}\,(\mathrm{P}\mathbf{p}'_0), \\ \mathbf{Sp}'_1\,\mathbf{F}\,(u) = \mathbf{S}u\,\mathbf{F}'\,(\mathbf{p}'_1) = \mathbf{S}u\,\Sigma Q\,\mathbf{S}\,(\mathrm{P}\mathbf{p}'_1), \\ \mathbf{Sp}'_2\,\mathbf{F}\,(u) = \mathbf{S}u\,\mathbf{F}'\,(\mathbf{p}'_2) = \mathbf{S}u\,\Sigma Q\,\mathbf{S}\,(\mathrm{P}\mathbf{p}'_2), \\ \mathbf{Sp}'_3\,\mathbf{F}\,(u) = \mathbf{S}u\,\mathbf{F}'\,(\mathbf{p}'_3) = \mathbf{S}u\,\Sigma Q\,\mathbf{S}\,(\mathrm{P}\mathbf{p}'_3), \end{cases}$$

nous aurons en définissant le système des q' par les relations suivantes, et cela quelque soit le nombre des termes renformés sous le signe Σ,

$$(12)\quad \begin{cases} q'_0\,\Delta_p = \mathbf{F}'\,(\mathbf{p}'_0) = \Sigma Q\,\mathbf{S}\,(\mathrm{P}\mathbf{p}'_0), \\ q'_1\,\Delta_p = \mathbf{F}'\,(\mathbf{p}'_1) = \Sigma Q\,\mathbf{S}\,(\mathrm{P}\mathbf{p}'_1), \\ q'_2\,\Delta_p = \mathbf{F}'\,(\mathbf{p}'_2) = \Sigma Q\,\mathbf{S}\,(\mathrm{P}\mathbf{p}'_2), \\ q'_3\,\Delta_p = \mathbf{F}'\,(\mathbf{p}'_3) = \Sigma Q\,\mathbf{S}\,(\mathrm{P}\mathbf{p}'_3). \end{cases}$$

Nous aurons l'équation cherchée (8). Les vecteurs p_0, p_2, p_2, p_3 sont arbitraires, et les q dépendent de ces quatrés vecteurs, et des quaternions donnés P et Q suivant des relations déterminées.

CHAPITRE X

THÉORIE VECTORIELLE DU PLAN

§ I. — Plans fixes

111. — La théorie vectorielle ne semble pas au premier abord apporter une notion nouvelle à la théorie cartésienne du plan. Cette dernière théorie parait indépendante de la notion de la dualité réelle et imaginaire ; de plus elle a atteint une grande généralité par les derniers travaux des géomètres, tels que Plucker, Salmon, Aoust, Chasles, etc. ; tandis que la théorie vectorielle est beaucoup moins avancée. Cependant le rapprochement des deux théories ne peut manquer de donner à chacune d'elles une plus grande extension, et par suite une plus grande unification de la connaissance mathématique.

D'un côté la théorie du plan précisera l'emploi et éclaircira les règles du calcul vectoriel, et de l'autre la théorie vectorielle ne pourra manquer de généraliser la théorie du plan. C'est ce que nous nous proposons d'examiner.

112. — Nous savons que l'équation d'un plan fixe en coordonnées cartésiennes est de la forme

(1) $$Ax + By + Cz + D = o.$$

Cette relation analytique exprime que la perpendiculaire abaissée d'un point dont les coordonnées sont (x, y, z) est nulle, ou que le lieu de ces points est un plan. Pour tout

autre point n'appartenant pas au plan, cette perpendiculaire a une valeur numérique

$$(2) \qquad \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = P,$$

et nous voyons que

$$\frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

est la valeur de cette perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées, et par suite que cette distance est constante.

Maintenant considérons deux vecteurs ternions coinitiaux, ayant une origine fixe, dont l'un pris pour axe est un paramètre constant et donné

$$(3) \qquad \mathbf{A} = iA + jB + kC,$$

et dont l'autre, variable en grandeur et en direction est assujetti à décrire un plan fixe, savoir :

$$(4) \qquad \rho = ix + jy + kz.$$

L'équation (1) du plan exprime que la projection de ce vecteur variable sur le précédent est constante, quelle que soit sa direction. Ces deux vecteurs déterminent un quaternion formé par leur position relative, et ce dernier mesure leur rapport par produit. La partie scalar de ce quaternion est précisément

$$(5) \qquad D = \mathbf{SA}\rho.$$

« *Ainsi le paramètre d'un plan fixe est le vecteur scalar d'un quaternion formé par les vecteurs A et ρ qui le limitent.* »

On peut voir que la position du plan n'est déterminée que relativement à ces deux vecteurs, et leur ensemble peut être tourné comme on voudra, et transporté où l'on voudra, ce qui est la propriété caractéristique d'un quaternion ou d'une quantité vectorielle.

« *Tout scalar linéaire est le paramètre d'un plan. Plus généralement, toute fonction scalar est le paramètre d'une surface lieu des intersections de ses plans tangents.* »

113. — Si nous prenons l'équation du plan sous la forme

(6) $$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p,$$

elle exprime la relation vectorielle

(7) $$\mathbf{S}\mathrm{I}\rho + p = 0.$$

Car cela revient à prendre l'axe ternion paramétrique pour unité de mesure. L'expression

(8) $$\mathrm{I} = i \cos\alpha + j \cos\beta + \cos\gamma$$

exprime la direction de ce ternion-unité, et le scalar p mesure directement la longueur de la perpendiculaire menée de l'origine parallèlement au vecteur I, qui en assigne la direction, et par suite celle du plan qui lui est perpendiculaire.

114. — L'expression $\mathbf{SA}\,\rho = 0$, exprime donc un plan qui passe par l'origine des coordonnées. Cette équation vectorielle exprime, en effet, que les deux vecteurs ternions coinitiaux **A** et ρ sont constamment rectangulaires entre eux et le vecteur ρ décrit un plan perpendiculaire au vecteur **A**. Ce dernier assigne la direction du plan, et sa grandeur modulaire reste arbitraire. Si nous considérons un point fixe du plan dont le vecteur soit donné, tel que $\beta = ix' + jy' + kz'$, il devra satisfaire à l'équation du plan et nous aurons par suite la condition

(9) $$\mathbf{SA}\beta = \mathrm{D};$$

d'où l'on tire, en éliminant D,

(10) $$\mathbf{SA}(\rho - \beta) = 0,$$

qui exprime l'équation d'un plan passant par un point fixe

(β) et qui, comme on sait, a la forme d'un plan passant par l'origine, savoir

(11) $$\mathrm{A}(x-x') + \mathrm{B}(y-y') + \mathrm{C}(z-z') = 0.$$

Cette équation vectorielle scalar exprime, en effet que toute droite ($\rho-\beta$) comprise dans le plan est perpendiculaire au vecteur normal ou paramétrique de ce plan. Les trois vecteurs ternions ($\mathbf{A}$, ρ, β) ont une même origine fixe, bien que complètement arbitraire ; c'est-à-dire, que leur ensemble peut être transporté où l'on voudra.

115. Le quaternion total de ($\mathbf{A}\,\rho$) est de la forme

(12) $$\begin{cases} \mathbf{A}\rho = \mathrm{D} + i\mathrm{L} + j\mathrm{M} + k\mathrm{N}, \\ \quad = -(\mathbf{SA}\rho + i\,\mathbf{S}i\mathbf{A}\rho + j\,\mathbf{S}j\mathbf{A}\rho + k\,\mathbf{S}k\mathbf{A}\rho), \end{cases}$$

où nous avons posé, pour abréger,

(13) $$\mathrm{L} = \mathrm{B}z - \mathrm{C}y, \quad \mathrm{M} = \mathrm{C}x - \mathrm{A}z, \quad \mathrm{N} = \mathrm{A}y - \mathrm{B}x.$$

Ces équations sont celles de la projection d'une même droite sur les plans coordonnés, et cette droite, qui est perpendiculaire à D, est comprise dans le plan (1). Ou bien si l'on veut ce sont les équations de trois plans menés par cette droite parallèlement aux axes coordonnés. En effet, ces trois équations simultanées montrent que ces trois plans sont parallèles à une même droite, et cette droite est exprimée par deux quelconques des équations (13), la troisième étant une suite des deux autres, c'est-à-dire, qu'elle est toute entière dans le plan exprimé par cette troisième.

Les relations scalars

(14) $$\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z = 0, \quad \text{et } \mathrm{AL} + \mathrm{BM} + \mathrm{CN} = 0,$$

montrent que le vecteur $i\,\mathrm{L} + j\,\mathrm{M} + k\,\mathrm{N}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\mathbf{A}$ et ρ. On a donc pour une valeur quelconque de (ρ) quatre plans qui passent par ce point, et l'intersection des trois plans (L, M, N) se trouve constamment sur le plan D. Les scalars variables (x, y, z) sont eux-mêmes

trois plans perpendiculaires entre eux et leur intersection commune est le point (ρ), et la relation scalar (1) exprime que le lieu de cette intersection se trouve sur un plan fixe.

116. Plus généralement une fonction linéaire $\mathbf{F}(\rho)$ du premier degré, d'un vecteur ternion variable (ρ) assujetti à décrire un plan est de la forme

$$(15) \qquad -\mathbf{F}(\rho) = \mathbf{SA}_0\rho + i\,\mathbf{SA}_1\rho + j\,\mathbf{SA}_2\rho + k\,\mathbf{SA}_3\rho,$$

où les $\mathbf{A}$ sont quatre ternions paramétriques donnés et constants, et où nous avons posé pour abréger

$$(16) \qquad \begin{cases} \mathbf{A}_0 = i\,A_0 + j\,B_0 + k\,C_0, \\ \mathbf{A}_1 = i\,A_1 + j\,B_1 + k\,C_1, \\ \mathbf{A}_2 = i\,A_2 + j\,B_2 + k\,C_2, \\ \mathbf{A}_3 = i\,A_3 + j\,B_3 + k\,C_3, \end{cases}$$

et nous aurons sous la forme linéaire

$$(17) \qquad \mathbf{F}(\rho) = D + iL + jM + kN;$$

savoir :

$$(18) \qquad \begin{cases} D = -\mathbf{SA}_0\rho = A_0x + B_0y + C_0z, \\ L = -\mathbf{SA}_1\rho = A_1x + B_1y + C_1z, \\ M = -\mathbf{SA}_2\rho = A_2x + B_2y + C_2z, \\ N = -\mathbf{SA}_3\rho = A_3x + B_3y + C_3z; \end{cases}$$

ce qui nous donne la forme linéaire cartésienne

$$(19) \qquad \mathbf{F}(\rho) = Q_1x + Q_2y + Q_3z,$$

où nous avons les trois quaternions constants et donnés

$$(20) \qquad \begin{cases} Q_1 = A_0 + i\,A_1 + j\,A_2 + k\,A_3, \\ Q_2 = B_0 + i\,B_1 + j\,B_2 + k\,B_3, \\ Q_3 = C_0 + i\,C_1 + j\,C_2 + k\,C_3. \end{cases}$$

conformément à la théorie des équations du premier degré, dont la théorie du plan est une application.

L'équation (17) exprime une somme vectorielle de 4 plans à trois variables, et les trois plans L, M, N se coupent en

un point, et leur point commun d'intersection (ρ) se trouve constamment sur le quatrième plan D.

En effet si nous désignons par d_0 le déterminant des trois plans L, M, N et par des petites lettres correspondantes les mineurs premiers, nous aurons pour leur point commun d'intersection

$$(21)\qquad \begin{cases} d_0 x = a_1\,\mathrm{L} + a_2\,\mathrm{M} + a_3\,\mathrm{N}, \\ d_0 y = b_1\,\mathrm{L} + b_2\,\mathrm{M} + b_3\,\mathrm{N}, \\ d_0 z = c_1\,\mathrm{L} + c_2\,\mathrm{M} + c_3\,\mathrm{N}. \end{cases}$$

Si nous substituons ces valeurs dans le plan D, nous aurons en posant pour abréger

$$(22)\qquad \begin{cases} a_1\,\mathrm{A}_0 + b_1\,\mathrm{B}_0 + c_1\,\mathrm{C}_0 = d_1, \\ a_2\,\mathrm{A}_0 + b_2\,\mathrm{B}_0 + c_2\,\mathrm{C}_0 = d_2, \\ a_3\,\mathrm{A}_0 + b_3\,\mathrm{B}_0 + c_3\,\mathrm{C}_0 = d_3, \end{cases}$$

l'identité

$$(23)\qquad d_0\,\mathrm{D} = d_1\,\mathrm{L} + d_2\,\mathrm{M} + d_3\,\mathrm{N},$$

qui exprime un plan qui passe par l'intersection des trois plans (L, M, N,) ou plus généralement 4 plans passant par le même point.

D'ailleurs les valeurs numériques (d_0, d_1. d_2, d_3) sont les déterminants des quatre équations (16) prises trois à trois, c'est-à-dire que l'on a

$$(23)\qquad \begin{aligned} d_0 &= -\,\mathbf{SA_1A_2A_3}, & d_1 &= -\,\mathbf{SA_0A_2A_3}, \\ d_2 &= -\,\mathbf{SA_1A_0A_3}, & d_3 &= -\,\mathbf{SA_0A_1A_2}. \end{aligned}$$

117. Considérons le système de deux plans fixes rapportés à la même origine ternion fixe, et soient

$$(25)\qquad \mathrm{W}_1 = \mathbf{SA}_1\rho - \mathrm{D} = 0, \quad \mathrm{W}_2 = \mathbf{SA}_2\rho - \mathrm{D}_1 = 0,$$

les équations de ces deux plans. Nous savons que l'équation

$$(26)\qquad a\,\mathrm{W}_1 + b\,\mathrm{W}_2 = 0,$$

est celle d'un plan, qui passe par la droite (W_1, V_2) de leur

intersection, et les valeurs numériques réelles a et b sont proportionnelles aux distances des plans W_1 et W_2 au plan $a W_1 + b W_2$.

Nous avons d'ailleurs

(27) $$W_1 D_2 - W_2 D_1 = o,$$

d'où

$$\frac{a}{b} = -\frac{D_1}{D_2} = k.$$

Nous pouvons poser $\mathbf{A}' = a \mathbf{A}_1 + b \mathbf{A}_2$, et l'équation du plan qui passe par la droite de leur intersection prend la forme

(28) $$W' = aW_1 + bW_2 = \mathbf{SA}'\rho - D' = o,$$

qui montre que ce plan passe par l'origine Si $D' = o$. Le plan

(29) $$W'' = aW_1 - bW_2 = o,$$

exprime le plan qui divise l'angle extérieur dans le même rapport. Les plans bissecteurs sont alors

(30) $$W_1 - W_2 = 1, \quad \text{et } W_1 + W_2 = o.$$

Les plans $a W_1 + b W_2 = o$ et $b W_1 + a W_2 = o$ sont des plans également inclinés sur les plans des bissecteurs.

(31) Si $W_1 - k W_2 = o$ et $W_1 - k' W_2 = o$,

sont des plans qui passent par la droite (W_1, W_2), $\frac{k}{k'}$ est le rapport anharmonique des deux plans précédents, et des deux plans proposés W_1 et W_2. En effet, ils passent tous par la même droite, et l'on a

(32) $$\frac{k}{k'} = \frac{\sin(W_1 W_3)}{\sin(W_1 W_4)} : \frac{\sin(W_2 W_3)}{\sin(W_2 W_4)},$$

où W_3 et W_4 sont les plans précédents (31).

Si nous éliminons successivement l'une des coordonnées (x, y, z) du ternion (ρ) entre les équations (25), et que nous posions

$$(33)\ \begin{cases} \mathbf{TA_1A_2} = i\,(\mathrm{BC'-B'C}) + j\,(\mathrm{CA'-C'A}) + k\,(\mathrm{AB'-A'B}), \\ \text{ou } \mathbf{A''} = i\,\mathrm{l} + j\,\mathrm{m} + k\,\mathrm{m}\,; \end{cases}$$

la droite d'intersection des deux plans sera

$$(34)\ \begin{cases} \mathbf{T}\rho\mathbf{A''} = i\,(\mathrm{n}y-\mathrm{m}z) + j\,(\mathrm{l}z-\mathrm{n}x) + k\,(\mathrm{m}x-\mathrm{l}y), \\ \text{ou } \alpha = i\,\mathrm{p} + j\,\mathrm{q} + k\,\mathrm{r}. \end{cases}$$

Les 6 quantités (l, m, n) et (p, q, r) ont été appelées les 6 coordonnées d'une droite (W_1, W_2), ou plutôt les 6 constantes spécifiques de cette droite. Il n'y en a que trois d'arbitraires, car elles sont liées entre elles par les deux équations scalars

$$(35)\quad \mathrm{p}x + \mathrm{q}y + \mathrm{r}z = \mathbf{S}\rho\alpha = \mathrm{o}, \quad \mathrm{l}x + \mathrm{m}y + \mathrm{n}z = \mathbf{S}\rho\mathbf{A''} = \mathrm{o},$$

qui montrent que α et $\mathbf{A''}$ sont deux vecteurs constamment perpendiculaires à ρ.

L'angle de deux plans est mesuré par celui de leurs paramètres normaux respectifs, $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$, et nous aurons

$$(36)\quad \begin{cases} \mathbf{SA_1A_2} = -\,(\mathrm{AA'} + \mathrm{BB'} + \mathrm{CC'}) = k\cos\theta, \\ \mathbf{TA_1A_2} = \mathbf{A''} = \mathrm{I}\,k\sin\theta, \end{cases}$$

en désignant par I la direction du vecteur ternion unité de $\mathbf{A''}$.

Si les deux plans sont parallèles, on a $\mathbf{TA_1A_2} = \mathrm{o}$, ce qui donne les conditions connues du parallélisme de deux plans

$$(37)\quad \mathrm{BC'-B'C} = \mathrm{o}, \quad \mathrm{CA'-C'A} = \mathrm{o}, \quad \mathrm{AB'-A'B} = \mathrm{o}.$$

Le rapport $\frac{a}{b}$ exprimera toujours le rapport de leurs distance à un troisième plan parallèle $aW_1 + bW_2 = \mathrm{o}$.

Si les deux plans sont perpendiculaires, on aura $\mathbf{SA_1A_2} = \mathrm{o}$, c'est-à-dire, la condition connue

$$(38)\quad \mathrm{AA'} + \mathrm{BB'} + \mathrm{CC'} = \mathrm{o}.$$

Le vecteur $\mathbf{A''}$ est alors un troisième vecteur rectangulaire sur les deux autres paramètres $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$, et ils forment un trièdre rectangulaire satisfaisant à la relation

$\frac{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3}{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}''} = -1$, en désignant par $\mathbf{M}_1$ $\mathbf{M}_2$, M″ leurs modules respectifs.

118. Considérons maintenant un système de trois plans passant généralement par un même point (ρ), et soient

(39) $W_1 = \mathbf{SA}_1\rho - D_1 = 0, \quad W_2 = \mathbf{SA}_2\rho - D_2 = 0,$
$W_3 = \mathbf{SA}_3\rho - D_3 = 0,$

les équations de ces trois plans rapportés à la même origine fixe, et au même système de coordonnées rectangulaires (i, j, k). L'élimination des (x, y, z) ou la résolution du système simultané des équations **(39)** donne un vecteur déterminé

(40) $(AB'C'')\,\rho = i\,(DB'C'') + j\,(AD'C'') + k\,(AB'D'')$,

où les paramètres sont les déterminants du système.

Nous pouvons poser

(41) $\mathbf{A}' = a\mathbf{A}_1 + b\mathbf{A}_2 + c\mathbf{A}_3, \quad D' = aD_1 + bD_2 + cD_3,$

et l'équation

(42) $W' = \mathbf{SA}'\rho' - D' = 0$

sera l'équation d'un plan qui passe par le point d'intersection (ρ) des trois plans (39). Si $D' = 0$, ce plan passera par l'origine.

Si nous désignons par (W_1, W_2, W_3) le point commun à trois plans fixes, l'équation du plan passant par ce point sera

(43) $aW_1 + bW_2 + cW_3 = 0.$

Les valeurs numériques réelles (a, b, c) sont données par les trois équations :

(44) $a = -\mathbf{SA}'\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3, \quad b = -\mathbf{SA}_1\mathbf{A}'\mathbf{A}_3, \quad c = -\mathbf{SA}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}',$

qui sont proportionnelles aux volumes des pyramides formées par ces vecteurs. La pyramide formée par les trois paramètres des trois plans donnés est de même proportionnelle à

$$(45)\qquad -\mathbf{SA_1A_2A_3} = (AB'C'') = d.$$

Les trois plans sont parallèles à une même droite si l'on a $\mathbf{SA_1\,A_2\,A_3} = o$; car alors les coordonnées du point (ρ) deviennent infinies, puisqu'elles sont données par les valeurs

$$(46)\qquad x = \frac{(DB'C'')}{(AB'C'')},\ y = \frac{(AD'C'')}{(AB'C'')},\ z = \frac{(AB'D'')}{(AB'C'')}.$$

Si l'un des numérateurs est nul, alors deux des plans sont parallèles et les trois plans passent par deux droites parallèles. Si aucun des numérateurs n'est nul les trois plans parallèles à une même direction se coupent deux à deux suivant trois droites parallèles, et l'une d'elle passe à l'infini dans le premier cas, où l'un des numérateurs s'annule.

Enfin si deux numérateurs s'annulent, le troisième s'annulle nécessairement, et les trois plans passent par la même droite. Si les trois plans sont respectivement parallèlement à un axe coordonné, nous retrourons le cas que nous avons examiné au n° 115. Enfin nous avons vu que nous pouvons considérer quatre plans passant par un même point, en considérant un quatrième plan scalar conjugué de trois plans rectangulaires ; c'est la question que nous avons examiné au n° 116.

119. Si nous considérons maintenant la question inverse d'un plan déterminé par trois vecteurs (ρ_1, ρ_2, ρ_3) et soit $\mathbf{SA}\,\rho = D$, l'équation du plan cherché. Comme cette équation doit satisfaire à chacun des vecteurs donnés, les coefficients devront satisfaire à trois valeurs différentes du vecteur de point ternion (ρ), sauoir :

$$(47)\qquad \mathbf{SA}\rho_1 - D = o,\ \mathbf{SA}\rho_2 - D = o,\ \mathbf{SA}\rho_3 - D = o,$$

Nous pouvons éliminer les A, B, C du vecteur paramétrique $\mathbf{A} = iA + jB + kC$, entre ces trois équations simultanées, et nous aurons

$$(48)\qquad \mathbf{A} = \mathbf{T}(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1),\quad D = \mathbf{S}\rho_1\rho_2\rho_3.$$

Si ces points sont ceux où le plan cherché rencontre les axes coordonnées rectangulaires (i, j, k), nous aurons en posant

(49) $$\rho_1 = ia, \quad \rho_2 = jb, \quad \rho_3 = kc,$$

(50) $$\mathbf{A} = i\,bc + j\,ca + k\,ab, \quad -\mathrm{D} = abc,$$

et le plan prend la forme cartésienne

(51) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

L'équation du plan, mise sous cette forme, exprime que la somme algébrique des pyramides partielles du tétraèdre formé par un rayon vecteur variable ρ assujetti à parcourir le plan de la base du tétraèdre est égale à la pyramide constante formée par les axes fixes.

Nous savons que l'équation cartésienne d'un plan assujetti à passer par trois points fixes s'exprime sous la forme d'un déterminant nul

(52) $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où les (x, y, z) sont les coordonnés courantes d'un plan passant par les trois points (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''). C'est-à-dire qu'elle exprime que le volume du tétraèdre formé par ces quatre points est nul. Les A, B, C, D, qui sont les déterminants mineurs relatifs à la première ligne, expriment pour les A, B, C les doubles surfaces des projections sur les plans coordonnés du triangle formé par les trois points fixes, et pour le scalar D, 6 fois le volume du trièdre formé par les vecteurs donnés (ρ_1, ρ_2, ρ_3), et exprime aussi le double de la surface du triangle des trois points donnés par la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur leur plan.

§ II. — Plans mobiles

120. Nous avons considéré jusqu'ici le point D, comme fixe par rapport à l'origine, ou ce qui revient au même l'origine comme fixe par rapport au point D du contact de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan fixe.

Nous pouvons maintenant considérer plus généralement l'origine des coordonnés ternions, comme variable suivant une direction fixe ; de là une quatrième variable scalar u.

Soit Q un paramètre quaternion donné,

(1) $$Q = \mathrm{D} + i\mathrm{A} + j\mathrm{B} + k\mathrm{C},$$

ou les (D, A, B, C) sont des constantes numériques réelles et données et soit le quaternion linéaire variable

(2) $$\xi = u + ix + jy + kz,$$

ou le vecteur courant d'un point vecteur mobile (ξ), assujetti à décrire un plan, nous aurons

(3) $$\mathbf{S}Q\,\xi = \mathrm{D}u - (\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z) = \mathrm{W}.$$

Si donc nous supposons que le paramètre d'un plan s'annule, ou que son équation se réduise à la forme ordinaire $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0$, c'est que le plan passe par l'origine commune des vecteurs Q et ξ, (n° 4), et que le vecteur ξ est constamment perpendiculaire au vecteur normal Q qui en est le vecteur directif.

121. La projection du vecteur ξ, ou d'un point quelconque du plan sur la direction fixe Q est constante et égale à W. La valeur numérique de cette constante est proportionnelle à la distance du plan à l'origine. En effet, en désignant par $\mathbf{M} = \sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2} = \sqrt{\mathrm{G}^2+\mathrm{D}^2}$, le module de Q où G

et D sont respectivement les valeurs numériques du ternion et du scalar de Q, nous aurons

(4) $D = \mathbf{M} \cos a, \quad A = \mathbf{M} \cos \alpha \sin a, \quad B = \mathbf{M} \cos \beta \sin a,$
$C = \mathbf{M} \cos \gamma \sin a,$

et l'équation du plan prendra la forme

(5) $u \cos a - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \sin \alpha + P = o,$

et l'équation scalar linéaire $SQ\xi = W$, peut être ramenée à la forme (n° 3), $SU\xi + P = o$, où U est le verseur de **Q**. C'est-à-dire, que l'équation $SQ\xi = W$ peut être identifiée avec celle d'un plan, dont la perpendiculaire abaissée de l'origine a pour valeur $P = -\frac{W}{\mathbf{M}}$, et qui fait avec les directions ternions (i, j, k) des angles dont les cosinus sont respectivement égaux à $\frac{A}{\mathbf{M} \sin a'}$ $\frac{B}{\mathbf{M} \sin a'}$ $\frac{C}{\mathbf{M} \sin a'}$ et avec l'axe scalar un angle dont le cosinus est égal à $\frac{D}{\mathbf{M}}$.

122. Non seulement le point vecteur variable (ξ) est assujetti à décrire le plan W, mais ce point (ξ) est pour chacune de ses positions, l'intersection de trois plans qui se coupent sur le plan W, savoir :

$$(6) \quad \begin{cases} L = -\mathbf{S}iQ\xi = Au + Dx + Bz - Cy, \\ M = -\mathbf{S}jQ\xi = Bu + Dy + Cx - Az, \\ N = -\mathbf{S}kQ\xi = Cu + Dz + Ay - Bx; \end{cases}$$

car on a généralement

$$(7) \quad \begin{cases} Q\xi = \mathbf{S}Q\xi - (i\,\mathbf{S}iQ\xi + j\,\mathbf{S}jQ\xi + k\,\mathbf{S}kQ\xi, \\ \text{ou} \quad Q\xi = W + iL + jM + kN. \end{cases}$$

Si l'on a $\mathbf{T}Q\xi = o$, il en résulte trois équations simultanées $L = o$, $M = o$, $N = o$, qui expriment que ces trois plans passent par l'origine ternion, et l'on a l'égalité multiple

$$(8) \qquad \frac{x}{\mathrm{A}} = \frac{y}{\mathrm{B}} = \frac{z}{\mathrm{C}} = -\frac{u}{\mathrm{D}},$$

c'est à-dire, les 6 conditions qui annulent les binômes

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{B}z - \mathrm{C}y = o, & \mathrm{C}x - \mathrm{A}z = o, & \mathrm{A}y - \mathrm{B}x = o, \\ \mathrm{A}u + \mathrm{D}z = o, & \mathrm{B}u + \mathrm{D}y = o, & \mathrm{C}u + \mathrm{D}z = o. \end{array} \right.$$

Si, au contraire, nous avons $\mathrm{W} = \mathrm{SQ}\xi = o$, ou

$$(10) \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{D}u,$$

la substitution de cette valeur de u dans les équations (6) permettra d'éliminer cette variable, et ces équations prendront la forme

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{DL} = (\mathrm{A}^2 + \mathrm{D}^2)\, x + (\mathrm{CD} - \mathrm{AB})\, y + (\mathrm{BD} + \mathrm{AC})\, z, \\ \mathrm{DM} = (\mathrm{CD} + \mathrm{AB})\, x + (\mathrm{B}^2 + \mathrm{D}^2)\, y + (\mathrm{AD} - \mathrm{BC})\, z, \\ \mathrm{DN} = (\mathrm{BD} - \mathrm{AC})\, x + (\mathrm{AD} + \mathrm{BC})\, y + (\mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2)\, z. \end{array} \right.$$

En désignant toujours par M le module de Q, le déterminant des seconds membres des équations (11) a pour valeur $\mathrm{D}^4\,\mathbf{M}^4$ et en supprimant le facteur commun $\mathrm{D}^2\mathbf{M}^2$, il vient

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}^2 x = \mathrm{DL} + \mathrm{CM} + \mathrm{BN}, \\ \mathbf{M}^2 x = \mathrm{CL} + \mathrm{DM} + \mathrm{AN}, \\ \mathbf{M}^2 z = \mathrm{BL} + \mathrm{AM} + \mathrm{DN}\,; \end{array} \right.$$

valeurs qui sont indépendantes de la coordonnée u.

Si nous posons

$$(13) \quad \mathrm{L}' = \mathrm{B}z - \mathrm{C}y, \quad \mathrm{M}' = \mathrm{C}x - \mathrm{A}z, \quad \mathrm{N}' = \mathrm{A}y - \mathrm{B}x,$$

nous aurons les deux relations identiques

$$(14) \quad \mathrm{L}'x + \mathrm{M}'y + \mathrm{N}'z = o, \quad \mathrm{AL}' + \mathrm{BM}' + \mathrm{CN}' = o.$$

Elles expriment que les ternions des vecteurs ξ et Q sont perpendiculaires au ternion $i\mathrm{L}' + j\mathrm{M}' + k\mathrm{N}'$.

123. Le quaternion du premier degré $Q\xi$ se compose donc d'un scalar et d'un ternion, c'est-à-dire d'un plan et d'une droite, quelque soit le trajet du point (ξ), assujetti à décrire un plan. Le ternion $\mathbf{T}Q\xi$ est donné par la somme vectorielle

de trois paramètres de plans ; il se décompose en deux autres vecteurs ternions, le premier relatif à des plans parallèles au plan de chacun des vecteurs iA, iB, kC, combiné avec D, et le second relatif à des plans parallèles au plan des A, B, C, pris deux à deux.

La projection d'un segment ξ sur un autre Q, ayant même origine, est égale au produit de leurs modules par le cosinus de leur angle. Si cette valeur est constante le lieu du vecteur variable est un plan ; c'est pourquoi tout vecteur scalar linéaire est le paramètre d'un plan, et le ternion résultant est le vecteur résultant de l'intersection de trois plans qui se coupent sur le plan scalar. C'est-à-dire, que le plan W est le lieu sur lequel se trouve l'intersection commune de trois autres plans L, M, N, relatifs au point directeur (ξ), assujetti à satisfaire à une équation vectorielle du premier degré.

Le point vectoriel (ξ) est lui-même défini par les scalars (u, x, y, z) qui sont les paramètres de quatre plans perpendiculaires aux axes coordonnés, l'un dit scalar, prenant des positions parallèles à lui-même, définies par leurs distances à l'origine, suivant un axe scalar donné, les trois autres qui se coupent au point ρ du vecteur ternion $ix + jy + kz$, qui est perpendiculaire à chaque instant à l'axe scalar u.

124. L'angle de deux plans W et W′ est mesuré par celui de leurs perpendiculaires. Si l'on se reporte à la règle de la multiplication de deux vecteurs quaternions du premier degré, nous aurons

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{AA' + BB' + CC'}{MM'}, \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{(BC'-B'C)^2 + (CA'-C'A)^2 + (AB'-A'B)^2}}{MM'}; \end{aligned} \right.$$

Il en résulte que les conditions de perpendicularité de deux vecteurs ne dépendent que de l'angle de leurs ternions-

unité et qu'il en est de même de leur parallélisme, et ces conditions sont indépendantes de la position de l'origine vectorielle ou de la valeur scalar u.

Si l'on considère les trois ternions

$$\mathbf{T}\, i\xi,\ \mathbf{T}\, j\xi,\ \mathbf{T}\, k\xi\,;$$

ceux-ci décrivent précisément les trois plans (L, M, N) respectivement ; de sorte que l'équation habituelle ou cartésienne

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z - \mathrm{D}u = \mathrm{W},$$

est nécessairement accompagnée de l'expression de trois autres plans (L, M, N) conjugués vectoriellement au plan W, résultant de l'expression linéaire d'une fonction vectorielle du premier degré $\mathbf{F}\,(\xi) = \mathrm{Q}\xi$, à quatre variables réelles.

125. Plus généralement une fonction linéaire $\mathbf{F}\,(\xi)$, d'un vecteur de point (ξ) assujetti à décrire un système de 4 plans conjugués vectoriellement sera de la forme

$$(16)\quad \mathbf{F}\,(\xi) = \mathbf{S}Q'_0\xi + i\,\mathbf{S}Q'_1\xi + j\,\mathbf{S}Q'_2\xi + k\,\mathbf{S}Q'_3\xi,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} Q'_0 &= \mathrm{D}_0 - (i\mathrm{A}_0 + j\mathrm{B}_0 + k\mathrm{C}_0),\\ Q'_1 &= \mathrm{D}_1 - (i\mathrm{A}_1 + j\mathrm{B}_1 + k\mathrm{C}_1),\\ Q'_2 &= \mathrm{D}_2 - (i\mathrm{A}_2 + j\mathrm{B}_2 + k\mathrm{C}_2),\\ Q'_3 &= \mathrm{D}_3 - (i\mathrm{A}_3 + j\mathrm{B}_3 + k\mathrm{C}_3)\,; \end{aligned}\right.$$

et nous aurons

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{W} &= \mathbf{S}Q'_0\xi = \mathrm{D}_0u + \mathrm{A}_0x + \mathrm{B}_0y + \mathrm{C}_0z,\\ \mathrm{L} &= \mathbf{S}Q'_1\xi = \mathrm{D}_1u + \mathrm{A}_1x + \mathrm{B}_1y + \mathrm{C}_1z,\\ \mathrm{M} &= \mathbf{S}Q'_2\xi = \mathrm{D}_2u + \mathrm{A}_2x + \mathrm{B}_2y + \mathrm{C}_2z,\\ \mathrm{N} &= \mathbf{S}Q'_3\xi = \mathrm{D}_3u + \mathrm{A}_3x + \mathrm{B}_3y + \mathrm{C}_3z. \end{aligned}\right.$$

De sorte que l'équation $\mathbf{F}\,(\xi)$ exprime une somme vectorielle linéaire de quatre plans à quatre variables réelles, dépendant de 16 coefficients numériques constants et donnés.

Le point d'intersection (ξ) commun des trois plans (L, M, N) se trouve sur le quatrième plan W, ou plan scalar.

En effet, en désignant par Δ le déterminant des seconds membres des équations (18), et par de petites lettres correspondantes les mineurs premiers, on détermine une valeur unique des coordonnées courantes pour chaque position du vecteur (ξ), appartenant aux quatre plans, savoir :

$$(19)\quad \begin{cases} \Delta u = d_0\,\mathrm{W} + d_1\,\mathrm{L} + d_2\,\mathrm{M} + d_3\,\mathrm{N}, \\ \Delta x = a_0\,\mathrm{W} + a_1\,\mathrm{L} + a_2\,\mathrm{M} + a_3\,\mathrm{N}, \\ \Delta y = b_0\,\mathrm{W} + b_1\,\mathrm{L} + b_2\,\mathrm{M} + b_3\,\mathrm{N}, \\ \Delta z = c_0\,\mathrm{W} + c_1\,\mathrm{L} + c_2\,\mathrm{M} + c_3\,\mathrm{N}. \end{cases}$$

Si les axes ternions L, M, N n'étaient pas rectangulaires on retrouverait le cas général d'une fonction linéaire

$$\mathbf{F}\,(\xi) + p_0\,\mathbf{S}q'_0\xi + p_1\,\mathbf{S}q'_1\xi + p_2\,\mathbf{S}q'_2\xi + p_3\,\mathbf{S}q'_3\xi.$$

Nous avons vu qu'il y a un système conjugué de quatre plans, de la fonction conjuguée réciproque,

$$\mathbf{F}'\,(\xi) = q'_0\,\mathbf{S}p_0\xi' + q'_1\,\mathbf{S}p_1\xi' + q'_2\,\mathbf{S}p_2\xi' + q'_3\,\mathbf{S}p_3\xi',$$

dont les coefficients de direction sont différents, conformément à la théorie générale des fonctions vectorielle du premier degré. D'où l'on conclut qu'à tout système oblique répond un second système oblique qui lui est conjugué, et qui ne se confond avec le premier, que lorsque les axes sont rectangulaires.

Enfin nous avons vu de plus que le vecteur conjugué direct ξ, donnera deux autres systèmes de fonctions conjuguées complémentaires. Cette multiplicité corrélative des figures géométriques n'était abordable qu'à l'aide du calcul vectoriel.

126. *Théorème.* — Si la somme algébrique des distances paramétriques d'un certain nombre de points vecteurs (ξ) à un plan $\mathrm{W} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D}u$, multipliées respec-

tivement par un facteur numérique réel m, donne une somme constamment nulle, le plan passe par un point fixe. »

L'équation du plan étant exprimé par W', quand on met dans son équation les coordonnées x', y', z', u' à la place de (x, y, z, u), etc., nous avons

$$m'W' + m''W'' + \cdots = 0.$$

Si donc nous posons pour abréger

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma m x' &= m'x' + m''x'' + \cdots, \\ \Sigma m y' &= m'y' + m''y'' + \cdots, \\ \Sigma m z' &= m'z' + m''z'' + \cdots, \\ \Sigma m u' &= m'u' + m''u'' + \cdots; \end{aligned}\right.$$

l'équation du plan prendra la forme

$$A\Sigma m x' + B\Sigma m y' + C\Sigma m'z' + D\Sigma m'u' = W\Sigma m.$$

Si nous éliminons W entre cette équation et l'équation proposée, nous aurons

$$A\left(u - \frac{\Sigma m'x'}{\Sigma m}\right) + B\left(y - \frac{\Sigma m'y'}{\Sigma m}\right) + C\left(z - \frac{\Sigma m'z'}{\Sigma m}\right) + D\left(u - \frac{\Sigma m'u'}{\Sigma m}\right) = 0,$$

qui est l'équation d'un plan à quatre variables d'un point ξ, passant par un point ξ_1, dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{\Sigma m'x'}{\Sigma m}, \quad y_1 = \frac{\Sigma m'y'}{\Sigma m}, \quad z_1 = \frac{\Sigma m'z'}{\Sigma m}, \quad u_1 = \frac{\Sigma m'u'}{\Sigma m}.$$

127. *Plan passant par quatre points.* — Si nous considérons un plan satisfaisant à quatre positions données des vecteurs ξ_0, ξ_1', ξ_2, ξ_3, et soit $SQ\xi = W$, l'un des plans cherchés. Comme cette équation doit satisfaire à chacune des valeurs données des vecteurs donnés, les coefficients de W satisferont à quatre valeurs différentes de ξ, et éliminant les composantes A, B, C, D du quaternion Q entre ces quatre

équations linéaires et l'équation W, on aura, en supprimant le facteur commun paramétrique W, le déterminant nul

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & u_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & u_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant suivant la règle ordinaire et considérant les x, y, z, u, comme les coordonnées d'un cinquième point ξ nous aurons

$$x\,(y_1\,z_1\,u_3\,1) + y\,(x_0\,z_1\,u_3\,1) + z\,(x_0\,y_1\,u_3\,1) + z\,(x_0\,y_1\,z_2\,u_3) = 0.$$

Le dernier terme exprime le volume du tétraèdre formé par les quatre points ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3, et les autres déterminent les projections de ce tétraèdre sur les quatre plans coordonnés. Ces points sont dans un même plan si ce volume est nul, et l'équation $W = 0$ devient l'équation ordinaire du plan à quatre variables homogènes.

CHAPITRE XI

THÉORIE VECTORIELLE DU PLAN (SUITE)

Plans conjugués

128. Considérons une fonction quaternion du premier degré, dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions linéaires des coordonnées d'un point directeur et posons

$$(1) \quad \begin{cases} Q = \mathbf{F}(\xi) = \mathrm{D} + i\mathrm{A} + j\mathrm{B} + k\mathrm{C}, \\ Q' = \mathbf{F}(\xi') = \mathrm{D}' + i\mathrm{A}' + j\mathrm{B}' + k\mathrm{C}', \end{cases}$$

où nous avons, les points directeurs

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = u + ix + jy + kz, \\ \xi' = u' + ix' + jy' + kz'. \end{cases}$$

Les A, B, C, D sont des fonctions linéaires scalars du vecteur de point ξ, c'est-à-dire les paramètres de 4 plans conjugués vectoriellement, comme nous l'avons défini précédemment. De même les (A′, B′, C′, D′) sont des fonctions linéaires scalars des coordonnées du vecteur de point ξ.

Cela posé, si les Q et Q' sont composés des mêmes 16 coefficients numériques de quatre quaternions constants et donnés que nous désignerons par les **p**, en posant pour abréger

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{p}_0 = d_0 + id_1 + jd_2 + kd_3, \\ \mathbf{p}_1 = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3, \\ \mathbf{p}_2 = b_0 + ib_1 + jb_2 + kb_3, \\ \mathbf{p}_3 = c_0 + ic_1 + jc_2 + kc_3, \end{cases}$$

et en désignant toujours par les **p**′ les conjugués p qui ne diffèrent des premiers que par le changement des lignes en colonnes de leur déterminant, et vice versa savoir :

$$(3^{\text{bis}})\quad \begin{cases} \mathbf{p}'_0 = d_0 + i\mathrm{a}_0 + j\mathrm{b}_0 + k\mathrm{c}_0, \\ \mathbf{p}'_1 = \mathrm{d}_0 + i\mathrm{a}_1 + j\mathrm{b}_1 + k\mathrm{c}_1, \\ \mathbf{p}'_2 + d_2 + i\mathrm{a}_2 + j\mathrm{b}_2 + k\mathrm{c}_2, \\ \mathbf{p}'_3 = d_3 + i\mathrm{a}_3 + j\mathrm{b}_3 + k\mathrm{c}_3, \end{cases}$$

nous aurons l'identité

$$(4)\qquad Q\xi' = Q'\xi.$$

Nous pourrons alors écrire

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{D} = \mathbf{Sp}'_0\xi, & \mathrm{A} = \mathbf{Sp}'_1\xi, & \mathrm{B} = \mathbf{Sp}'_2\xi, & \mathrm{C} = \mathbf{Sp}'_3\xi, \\ \mathrm{D}' = \mathbf{Sp}_0\xi', & \mathrm{A}' = \mathbf{Sp}_0\xi', & \mathrm{B}' = \mathbf{Sp}_2\xi', & \mathrm{C}' = \mathbf{Sp}_3\xi', \end{cases}$$

qui établissent la relation (4).

Nous avons en développant l'équation (4)

$$(6)\qquad Q\xi' = \mathrm{U}_0 + i\mathrm{U}_1 + j\mathrm{U}_2 + k\mathrm{U}_3 = Q'\xi.$$

On en conclut que nous avons les quatres identités simultanées

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{U}_0 = \mathbf{S}Q\xi' = \mathbf{S}Q'\xi, \\ -\mathrm{U}_1 = \mathbf{S}iQ\xi' = \mathbf{S}iQ'\xi, \\ -\mathrm{U}_2 = \mathbf{S}jQ\xi' = \mathbf{S}jQ'\xi, \\ -\mathrm{U}_3 = \mathbf{S}kQ\xi' = \mathbf{S}kQ'\xi. \end{cases}$$

En effet en effectuant les calculs nous avons

$$(8)\quad \begin{cases} Q\xi' = \mathbf{S}Q\xi' - (i\,\mathbf{S}iQ\xi' + j\,\mathbf{S}jQ\xi' + k\,\mathbf{S}kQ\xi' \\ Q'\xi = \mathbf{S}Q'\xi - (i\,\mathbf{S}iQ'\xi + j\,\mathbf{S}jQ'\xi + k\,\mathbf{S}kQ'\xi, \end{cases}$$

d'après la règle du produit de deux quaternions, et en comparant entre elles les unités vectorielles de même espèce. On voit facilement que nous pouvons écrire les U, sous deux formes symétriques, par le simple changement des accents, savoir :

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{U}_0 = u\mathrm{D}' - (x\mathrm{A}' + y\mathrm{B}' + z\mathrm{C}') = u'\mathrm{D} - (x'\mathrm{A} + y'\mathrm{B} + z'\mathrm{C}), \\ \mathrm{U}_1 = u\mathrm{A}' + x\mathrm{D}' + z\mathrm{B}' - y\mathrm{C}' = u'\mathrm{A} + x'\mathrm{D} + z'\mathrm{B} - y'\mathrm{C}, \\ \mathrm{U}_2 = u\mathrm{B}' + y\mathrm{D}' + x\mathrm{C}' - z\mathrm{A}' = u'\mathrm{B} + y'\mathrm{D} + x'\mathrm{C} - z'\mathrm{A}, \\ \mathrm{U}_3 = u\mathrm{C}' + z\mathrm{D}' + y\mathrm{A}' - x\mathrm{B}' = u'\mathrm{C} + z'\mathrm{D} + y'\mathrm{A} - x'\mathrm{B}. \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que la relation générale (4) de

deux quaternions conjugués est une application du Lemme

(10) $$\mathbf{S}\xi\,\mathbf{F}(\xi') = \mathbf{S}\xi'\,\mathbf{F}'(\xi),$$

en désignant par **F** une fonction linéaire du premier degré quelconque, car il suffit de poser $\mathbf{F}(\xi') = Q'$ et $\mathbf{F}''(\xi) = Q$.

Ces relations nous conduisent directement à la généralisation vectorielle du principe de Dualité par plans, établi par Chasles en partant de la première égalité (7). Nous voyons immédiatement qu'il y a trois autres relations concomittantes, ce que le calcul vectoriel seul pouvait montrer.

12). *Remarque*. — Chasles fait au fond usage de scalars de quaternions, puisqu'il prend les coefficients de direction d'un plan mobile comme dépendant de quatre paramètres constants, et que si la coordonnée scalar u n'est pas exprimée numériquement, elle ne peut disparaître que par suite de l'homogénité, et de la condition restrictive par laquelle il annule le paramètre scalar en faisant $\mathbf{S}Q\,\xi' = o$, qui assujettit le plan mobile à passer par un point fixe, passant par l'origine vectorielle, et c'est la condition qui est exprimée dans la formation des figures corrélatives. Chasles est même en fait assez embarrassé de son quatrième paramètre, qu'il désigne par U.

En effet, si on ne considérait que les trois variables ternions (x, y, z) d'un vecteur de point, cela reviendrait à considérer tous les plans mobiles passant par un point fixe pris pour origine, et les plans comme étant les génératrices de cônes passant par cette origine.

Or si la quantité, qu'il désigne par U et que nous désignons par D, varie seule, le plan mobile se meut parallèlement à lui-même. Si au contraire D reste constant, et que les A, B, C viennent à varier, le plan mobile ne fait que tourner autour de l'extrémité de D. Le mouvement, d'un plan mobile se compose cinématiquement de deux mouvements l'un de translation parallèlement à lui-mêm suivant l'élément

scalar de la trajectoire du point vecteur, et l'autre de rotation autour de la position primitive considérée comme fixe. Il faut toujours pour compléter la question en revenir au principe d'Euler, que le mouvement le plus général d'un plan est un roulement sur une sur une surface réglée, accompagnée d'un glissement suivant la génératrice de contact.

L'équation d'un plan mobile est donc en général de la forme $Ax' + By' + Cz' + Du' = W$, où chacun des coefficients exprime le paramétre scalar d'un plan fixe, c'est-à dire, des polynômes à 4 termes de la forme homogène ($ax. + by + cz - du$), où les coordonnées courantes n'entrent qu'au premier degré. Mais le calcul vectoriel nous apprend qu'il y a nécessairement trois aûtres plans mobiles conjugués orthogonalement au plan scalar considéré seul par Chasles, et par suite trois surfaces orthogonales conjuguées de la surface scalar corrélative.

Chasles pose les équations

$$(11) \qquad A = LD, \quad B = MD, \quad C = ND$$

pour déterminer les coordonnées (x, y, z) du point directeur, L, M, N étant les constantes paramétriques d'un plan fixe.

$$(12) \qquad Lx' + My' + Nz' = 1.$$

Mais on voit facilement que les équations (11) sont les équations de trois plans qui passent par l'intersection des plans A, B, C respectivement et du plan D, et que les constantes sont les rapports des distances de ces plans aux quatre plans A, B, C, D, respectivement.

De ces équations on en déduit trois autres par l'élimination de D, savoir :

$$(13) \qquad AM—BL = o, \quad BN—CM = o, \quad CL—AN = o,$$

qui expriment les équations de trois plans passant par l'intersection des plans A, B, C, pris deux à deux, et ces trois plans passent par un même point, et ils se coupent suivant

une même droite. Si nous ajoutons les trois premières équations respectivement multipliées par x', y', z', il vient

$$(14)\qquad Ax' + By' + Cz' = (Lx' + My' + Nz')\,D,$$

d'où résulte que l'on a le scalar $\mathbf{S}\mathrm{Q}\xi' = 0$, ce qui est une condition particulière. Or Chasles emploie quatre plans qui ont des valeurs paramétriques définies, car alors l'équation serait identique, et ils expriment, que la perpendiculaire abaissée de l'origine a une valeur constante et non nulle.

Quand on considère une équation de la forme

$$(15)\qquad W = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

où l'on suppose la coordonnée scalar $u = 1$, elle exprime toujours la longueur numérique de la perpendiculaire abaissée du point $(x, y, z, 1)$ sur le plan dont les coordonnées courantes sont désignées par $(x'\ y', z', u')$.

Cela posé, nous étudierons le théorème de Chasles en nous permettant d'y apporter la généralisation qui découle de la théorie vectorielle du plan.

130. *Théorème de Chasles.* — Si l'on conçoit un plan mobile déterminé dans chacune de ses positions par l'équation scalar

$$(16)\qquad \mathbf{S}Q'\xi = U_0,$$

et si les paramètres de cette équation contiennent au premier degré les coordonnées vectorielles d'un point directeur ξ'.

1° Quand ce vecteur parcourt un plan, le plan mobile tourne autour d'un point fixe.

2° Quand ce vecteur parcourt une droite, le plan mobile tourne autour d'une seconde droite.

3° Quand ce vecteur parcourt une surface donnée, le plan mobile roule sur une autre surface. Si la première surface

est du second ordre, la seconde est aussi du second ordre. Si la première est algébrique ou cartésienne, et d'un degré entier m, la seconde est aussi algébrique et telle qu'on peut lui mener m plans tangents.

L'équation du plan mobile,étant donnée par l'équation (16), l'est aussi, par hypothèse par l'équation

$$(17) \qquad \mathbf{S}Q\xi' = \mathrm{U}_0,$$

où Q est un quaternion paramétrique, qui exprime une fonction vectorielle du premier degré du vecteur de point ξ.

Pour une valeur quelconque du vecteur ξ', qui est assujetti à décrire un plan, le plan mobile (16) passera par l'intersection commune de quatre plans fixes :

$$(18) \quad \mathrm{D} = \mathbf{Sp}'_0\xi, \quad \mathrm{A} = \mathbf{Sp}'_1\xi, \quad \mathrm{B} = \mathbf{Sp}'_2\xi, \quad \mathrm{C} = \mathbf{Sp}'_3\xi,$$

et par suite par un point ξ, dont les coordonnées vectorielles sont déterminées par les 4 équations linéaires (18).

Réciproquement si l'on considère le rayon vectoriel ξ comme assujetti à décrire un plan, l'équation du plan mobile sera donnée par l'équation (16), où Q' est une fonction vectorielle du premier degré des coordonnées courantes de quatre plans, et l'équation (15) sera l'équation du plan qui passe par l'intersection commune de quatre plans :

$$\mathrm{D}' = \mathbf{Sp}_0\xi', \quad \mathrm{A}' = \mathbf{Sp}_1\xi, \quad \mathrm{B}' = \mathbf{Sp}_2\xi', \quad \mathrm{C}' = \mathbf{Sp}_3\xi',$$

qui déterminent les coordonnées d'un vecteur ξ'. Ce point est appelé le pôle du plan que parcourt le vecteur de point ξ, et réciproquement. On dit donc que leurs pôles sont conjugués.

Quant le point directeur parcourt une droite, intersection de deux plans, le plan mobile passera en deux points fixes qui sont les pôles de ces deux plans, et par suite le plan mobile tournera autour de la droite qui joint ces deux points.

Quand le point directeur parcourt une surface S, la surface enveloppe du plan mobile est le lieu géométrique des

pôles de tous les plans tangents à la surface corrélative S′ et le point où le plan mobile dans une de ses positions touche la surface enveloppe est le pôle du plan tangent mené par le point directeur, auquel répond cette position du plan mobile.

Quand le plan mobile passe par son point directeur, ce point a pour lieu géométrique une surface du second ordre, car en faisant $\xi = \xi'$, on a

$$SQ'\xi' = U_0$$

qui est une surface du second ordre à quatre variables dont le paramètre est U_0.

Si l'on considère l'équation

$$SQ\xi = U_0,$$

on aura une surface du second ordre, qui aura même paramètre, mais qui diffère de la première par ses coefficients et qui lui est conjuguée.

Il en résulte qu'à un même point de l'espace, considéré successivement comme appartenant à la première figure puis à la seconde figure, correspondent deux plans différents.

Quand le déterminant des 16 coefficients des **p** (3) devient symétrique, il n'y a plus que 10 coefficients distincts, et le système des **p**′ devient identique à celui des **p**. Le plan mobile passe constamment par son point directeur et les deux surface du second ordre

$$SQ\xi = U_0, \quad SQ'\xi' = U_0,$$

se confondent en une seule, ainsi que leurs plans tangents, comme il arrive, comme l'on sait, dans le cas des polaires réciproques et des trajectoires normales.

Puisque l'on a par hypothèse

$$SQ'\xi = SQ\xi'$$

si l'on veut déterminer un plan de la figure corrélative correspondant à un point ξ'' de la figure proposée, on mettra

les coordonnées de ce point à la place de ξ' et l'on aura l'équation du plan cherché.

Si l'on veut déterminer un point de la figure corrélative correspondant à un plan de la figure proposée, on mettra les coordonnées ξ_1 de ce plan à la place de ξ, et l'on aura quatre équations pour déterminer les coordonnées du pôle de ce plan, qui est le point cherché.

Si l'on suppose qu'un point directeur ξ_1 parcourt la surface donnée S, la surface corrélative S′ est l'enveloppe des plans mobiles correspondants. Si l'on suppose qu'un nouveau point directeur ξ_2 parcourt la surface S′, puisque l'on suppose que ce point coïncide avec un plan de la surface S, les deux surfaces engendrées l'une par l'autre le sont par deux plans différents, car les deux plans

$$\mathbf{S}Q'\xi_2 = \mathbf{S}Q\xi_1',$$

bien qu'ayant mêmes paramètres, ont des coefficients de directions différentes. Pour qu'ils se confondent, il faut et il suffit que le déterminant des 16 coefficients soit symétrique.

Quand le point directeur se meut à l'infini, le plan mobile passera par le point fixe

$$D = \mathbf{Sp}_0\xi, \quad A = \mathbf{Sp}_1\xi, \quad B = \mathbf{Sp}_2\xi, \quad C = \mathbf{Sp}_3\xi,$$

et il est de la forme

$$ou + ox + oy + oz = o.$$

De là cette conclusion cosmologique de Poncelet que l'espace indéfini a pour enveloppe une surface plane.

Ce que nous venons de dire pour le paramètre U_0 peut se répéter identiquement pour les trois autres paramètres U_1, U_2, U_3, de sorte que l'équation vectorielle

$$Q'\xi = Q\xi'$$

entraîne quatre systèmes de figures corrélatives, conjuguées vectoriellement, et formant un système triplement ortho-

gonal, conjugué d'une quatrième surface scalar sur laquelle se trouve constamment leur point d'intersection commun.

Comme nous n'avons pour but, en rappelant le théorème de Chasles, que de montrer la généralisation analytique et géométrique qu'apporte le calcul vectoriel, nous renverrons pour plus de détails à l'ouvrage de l'illustre géomètre, nous réservant, si le temps nous le permet, de revenir plus explicitement sur cette question.

CHAPITRE XII

RAPPORT ANHARMONIQUE VECTORIEL

§ I. — Préliminaires

131. *Théorème fondamental.* — Etant pris trois points a, b, c, situés comme on voudra dans l'espace, on a toujours la relation vectorielle

$$ab + bc + ca = 0.$$

Nous avons développé dans la première partie les principes de l'addition vectorielle. Si chaque segment est un vecteur défini en grandeur et en direction, l'opération de l'addition a pour but de les transporter les uns à la suite des autres dans un certain ordre.

Corollaire. — Si l'on rapporte deux points a et b à une nouvelle origine commune O, on a toujours

$$ab + bO + Oa = 0$$

d'où

$$ab = Ob - Oa,$$

c'est-à-dire que la différence vectorielle de deux segments, qui ont une même origine, est toujours égale au troisième segment, quelle que soit l'origine O.

132. *Théorème II.* — Quatre points a, b, c, d, situés comme on voudra dans l'espace, donnent 6 segments vectoriels, qui forment un tétraédre.

1° Deux arêtes opposées sont les diagonales du quadrila-

tère plan ou gauche formé par les quatres autres segments, passant aux mêmes points, a, b, c, d.

On a donc trois quadrilatères distincts correspondant aux trois systèmes d'arètes opposées du même tétraèdre.

2° Si nous parcourons chacun de ces quadrilatères dans un même sens pour revenir au point de départ, nous aurons trois équations vectorielles linéaires à quatre termes, d'après le théorème fondamental.

La dénomination des points a, b, c, d, est complètement arbitraire, et nous pouvons toujours supposer que les trois points a, b, c forment un triangle de base relatif au quatrième point d, considéré comme sommet du tétraèdre des quatre points.

Désignons les 6 segments de la manière suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} A = bc, & B = ca, & C = ab, \\ A' = ad, & B' = bd, & C' = cd. \end{cases}$$

3° Nous aurons par chacune des faces triangulaires du tétraèdre quatre équations vectorielles linéaires à trois termes, savoir :

$$(2) \qquad \begin{cases} bc + ca + ab = A + B + C = o, \\ bc + cd + db = A + C' - B' = o, \\ ca + ad + dc = B + A' - C' = o, \\ ab + bd + da = C + B' - A' = o. \end{cases}$$

On se rappellera que toute permutation circulaire ne change rien à l'équation vectorielle linéaire, puisque toutes ces permutations satisfont au théorème fondamental.

Mais toute permutation non circulaire répond à un changement dans l'ordre ou la dénomination des points.

4° En substituant successivement dans la première équation (2) la valeur d'un des vecteurs A, B, C, tirée de l'une des trois autres, nous aurons les trois équations vectorielles linéaires à quatre termes des trois quadrilatères distincts savoir :

$$
(3) \begin{cases} bd + dc + ca + ab = \mathrm{B}' - \mathrm{C}' + \mathrm{B} + \mathrm{C} = o, \\ cb + ba + ab + bc + \mathrm{C}' - \mathrm{A}' + \mathrm{C} + \mathrm{A} = o, \\ ad + db + bc + ca = \mathrm{A}' - \mathrm{B}' + \mathrm{A} + \mathrm{B} = o. \end{cases}
$$

Remarque. — Avec 6 segments donnés formant quatre à quatre les trois quadrilatères du tétraèdre des quatre mêmes points, on peut sans changer la grandeur et la direction de ces vecteurs, obtenir, en changeant leur ordre, 6 tétraèdres distincts, de quatre points situés différemment, dont trois sont semblables et différemment placés, comme nous l'avons montré dans l'addition vectorielle. (Prem. partie.)

Les systèmes des vecteurs A,A' ; B,B' ; C, C', pris deux à deux sont les trois systèmes des arètes opposées du tétraèdre des quatre points a, b, c, d, ou les diagonales des trois quadrilatères correspondant aux systèmes des 6 segments pris 4 à 4, pour former un contour polygonal fermé, passant aux quatre points donnés. Les trois vecteurs A, B, C sont par hypothèse dans un même plan puisque l'on considère le point d comme sonnet, bien que ce choix soit complètement arbitraire. Alors les trois autres vecteurs A', B', C' issus du point d' forment un trièdre, qui mesure le tétraèdre, et suffisent à déterminer les quatres points a, b, c, d.

133. *Définition.* —Nous appellerons toujours rapport anharmonique, absolument comme dans le cas de vecteurs situés sur une même droite, l'expression telle que

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd},$$

formée de quatre segments, ou le rapport, au signe près,

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}'} : \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}'},$$

que nous pouvons écrire plus symétriquement

$$\mathrm{BB}' / \mathrm{AA}' = \mathrm{L},$$

comme exprimant le rapport du produit de deux arêtes opposées du tétraèdre de quatre points a, b, c, d, et nous poserons

$$(4) \qquad BB'/AA' = L, \quad AA'/CC' = M, \quad CC'/BB' = N,$$

pour l'expression des trois rapports anharmoniques distincts de quatre points. Ici les rapports anharmoniques sont des vecteurs déterminés en grandeur et en direction. Nous voyons immédiatement que nous avons la relation

$$(5) \qquad LMN = 1,$$

et par suite leurs trois verseurs forment un triangle sphériqne fermé sur la sphère-unité.

Si nous désignons par des petites lettres les modules des vecteurs, et par λ, μ, ν les verseurs respectifs de L, M, et N, nous pourrons écrire.

$$(4 \text{ bis}) \qquad \begin{cases} L = l\lambda = BB'/AA' = \dfrac{bb'}{aa'}\dfrac{U_2}{U_1}, \\ M = m\mu = AA'/CC' = \dfrac{aa'}{cc'}\dfrac{U_1}{U_3}, \\ N = n\nu = CC'/BB' = \dfrac{cc'}{bb'}\dfrac{U_3}{U_2}. \end{cases}$$

Il faut observer que l'on a considéré jusqu'ici les segments, ayant le même sens sur une même droite, comme ayant tous le même signe, sans aucune notion du contour fermé des quatre points, tandis que la notion de continuité vectorielle est indépendante de l'origine commune des segments, ce qui produit certaines différences dans le signe des rapports anharmoniques, tandis que ce signe est toujours défini sans ambiguité par celui du verseur, les modules étant des quantités numériques qui ont l'unité positive pour mesure.

134. *Généralisation.* — Le rapport anharmonique de quatre points, pris sur une même droite, est évidemment un cas particulier du rapport anharmonique de quatre points pris comme on voudra dans l'espace. Il en est de même pour le rapport anharmonique de quatre droites concourantes en un point, quand on considère le cas particulier où ces quatre droites sont dans un même plan.

Les théorèmes du rapport anharmonique de 6 segments pris quatre à quatre, énoncés par Chasles pour des points situés en ligne droite, ont absolument la même forme algébrique implicite, que nous avons appelé la forme cartésienne, quand on considère les quatre points a, b, c, d, situés comme on voudra, pour former un tétraèdre inscriptible à la sphère, et il est évident que les cas où ces quatre points sont dans un même plan, et inscriptible au cercle, et où ces quatre points se projettent sur une même droite, sur un même diamètre fixe, sont des cas particuliers du cas général.

Le rapport anharmonique, au lieu d'être une quantité numérique, est un vecteur défini, et il n'y aura qu'à appliquer les règles du calcul vectoriel, pour déterminer le verseur du rapport anharmonique des 6 segments, pris quatre à quatre.

Réciproquement, si nous avons 4 points en ligne droite, nous pouvons toujours les considérer comme la projection orthogonale d'un quadrilatère sur une droite quelconque passant par son plan. Alors chaque segment est accompagné du cosinus de son angle de projection et exprime un vecteur scalar, et chaque projection sur un plan, perpendiculaire à la droite, sera accompagnée du sinus de l'angle de projection et exprimera le module ternion du vecteur du quadrilatère, dont l'unité verseur est la même pour tous les vecteurs ternions et disparait en facteur commun.

Enfin dans le cas d'un quadrilatère gauche de quatre points, situés comme on voudra, nous savons que cette som-

mation se ramène à un quadrilatère plan scalar dont le plan verseur est arbitraire, ce qui ramène à la question précédente, et ensuite à un polygone ternion issu d'une origine arbitraire sur le plan scalar et formant sur la sphère unité un quadrilatère sphérique fermé, dont le rapport anharmonique des arcs pris 4 à 4, donne le verseur du rapport anharmonique des 6 segments du quadrilatère gauche pris 4 à 4. Ce que l'on peut voir directement. en observant que tout tétraèdre de quatre points est inscriptible à la sphère, dont le rayon est arbitraire et constitue une échelle de construction, et chacun des segments peut être considéré comme la corde des arcs de grands cercles de la sphère, et nous retrouverons les 3 quadrilatères sphériques, correspondant aux trois quadrilatères gauches rectilignes, relatifs à chaque couple de cotés opposés du tétraèdre.

135. Théorème III. — « *Quelque soit l'ordre et la position de 4 points, a, b, c, d, dans l'espace, si nous faisons la somme des produits des trois couples d'arètes opposées de leur tétraèdre, cette somme est nulle.* » Et l'on a généralement

$$\text{(6)} \qquad AA' + BB' + CC' = o.$$

Le changement dans l'ordre cyclique ne changera rien au résultat. Mais l'interversion des termes revient à changer l'ordre ou la dénomination des mêmes points. Par exemple si nous écrivons $A'A$ au lieu de AA', dans l'équation cela revient à changer A en A' et réciproquement, et par suite à changer b en a et c en d, et l'on a l'ordre b, a, d, c, et l'on aura la nouvelle forme $A'A + B'B + CC' = o$, et ainsi de suite.

Si nous désignons respectivement par (α, β, γ) les arguments des verseurs des produits AA' BB', CC', et par I, J, K, les ternions-unité de leurs plans verseurs, et par de petites

lettres les longueurs modulaires des 6 segments, l'équation (6) prendra la forme

$$(7)\quad \begin{cases} aa'(\cos\alpha + \mathrm{I}\sin\alpha) + bb'(\cos\beta + \mathrm{J}\sin\beta) \\ \qquad + cc'(\cos\gamma + \mathrm{K}\sin\gamma) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad aa'\,\mathrm{U}_1 + bb'\,\mathrm{U}_2 + cc'\,\mathrm{U}_3 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres, l'une scalar, l'autre ternion, qui doivent avoir lieu simultanément, savoir :

$$(8)\quad \begin{cases} aa'\cos\alpha + bb'\cos\beta + cc'\cos\gamma = 0, \\ \mathrm{I}\,aa'\sin\alpha + \mathrm{J}\,bb'\sin\beta + \mathrm{K}\,cc'\sin\gamma = 0. \end{cases}$$

On voit facilement que les directions I, J, K sont respectivement celles des perpendiculaires communes aux couples des arêtes opposées.

Dans le cas particulier ou ces trois directions deviennent parallèlles, ou que les 4 points sont dans un même plan, elles assignent la direction du plan du quadrilatère, et les (I, J, K) disparaissent en facteur commun de la seconde équation (7). Dans le cas contraire ces directions sont distinctes.

On voit, d'après la première équation (8), que l'un des cosinus est de signe contraire aux deux autres, et comme on peut changer tous les signes de l'équation, il suffira de considérer le dernier comme négatif. D'après l'ordre des lettres a, b, c, d, où les B et B′ sont les diagonales intérieures, on voit que, dans un quadrilatère plan, c'est l'angle β qui sera obtus et les deux angles α et γ seront de même signe. La même observation aura lieu pour les signes des ternions I, J, K dans la seconde équation (8). On en conclut que l'un des verseurs U dans l'équation (7) est de signe contraire à celui des deux autres, et par suite que dans les trois rapports anharmoniques L, M, N, l'un d'eux est de signe contraire aux deux autres, et que l'on aura toujours d'une manière explicite $\mathrm{LMN} = -1$, quand on donne aux verseurs leurs signes respectifs.

La théorie des trièdres, exposée avec beaucoup de clarté par Dostor (*Eléments de la théorie des déterminants*), nous fournira la démonstration directe de ce théorème.

On y trouve la démonstration de la première équation(8), car en en désignant par λ, μ ν, les angles des faces du trièdre au sommet d, on a

$$(9) \qquad \begin{cases} a \cos\alpha = b' \cos\nu - c' \cos\mu, \\ b \cos\beta = c' \cos\lambda - a' \cos\nu, \\ c \cos\gamma = a' \cos\mu - b' \cos\lambda. \end{cases}$$

Les trois équations scalars, respectivement multipliées par a', b', c' et ajoutées, donnent la première (8). Nous retrouverons l'équation connue relative à quatre points sur la même droite $aa' + bb' + cc' = o$, quand tous les vecteurs sont parallèles de sorte que tous les cosinus égaux entre eux ou à l'unité, au signe près, disparaissent en facteur commun. Il reste à démontrer la seconde équation (8).

Dans le cas où les quatre points sont dans un même plan on a de même

$$\begin{cases} aa' \sin\alpha = a'b' \sin\nu - a'c' \sin\mu, \\ bb' \sin\beta = b'c' \sin\lambda - b'a' \sin\nu, \\ cc' \sin\gamma = c'a' \sin\mu - c'b' \sin\lambda. \end{cases}$$

Ces trois équations scalars ajoutées ensemble donnent la seconde équation (8). En effet on a trois triangles qui ont même base et qui sont entre eux comme leur hauteur, et la simple théorie des parallélogrammes démontre l'équation.

Mais dans le cas général, il faut recourir à la trigonométrie sphérique.

Désignons par a'', b'', c'', les longueurs modulaires des plus courtes distances des arètes opposées respectivement, qui ont I, J, K pour direction vectorielle. Si nous élevons au carré chacune des équations (8), nous aurons leur module qui devra être nul. Le carré de la seconde donne

$$-\left\{\begin{array}{r}a^2a'^2\sin^2+b^2b'^2\sin^2\beta+c^2c'^2\sin^2\gamma+2aa'bb'\sin\alpha\sin\beta\cos(a''b'')\\ +2aa'cc'\sin\alpha\sin\gamma\cos(a''c'')\\ +2bb'cc'\sin\beta\sin\gamma\cos(b''c'')\end{array}\right\}=0.$$

Si nous ajoutons le carré de la première, qui est également nul et que nous posions pour abréger, d'après la trigométrie,

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos(a''b'')=\cos\nu',\\ \cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos(c''a'')=\cos\mu',\\ \cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos(b''c'')=\cos\lambda',\end{array}\right.$$

nous pouvons écrire le résultat sous la forme suivante en désignant par λ', μ', ν', les angles du triangle abc de la base,

$$\begin{array}{l}aa'(aa'+bb'\cos\nu'+cc'\cos\mu')\\ +bb'(aa'\cos\nu'+bb'+cc'\cos\lambda'),\\ +cc'(aa'\cos\mu'+bb'\cos\lambda'+cc')=0.\end{array}$$

Or il suffira d'observer que les angles λ', μ', ν' sont dans le même plan scalar de mesure des verseurs U_1, U_2. U_3, et l'on a par suite

$$\begin{vmatrix}1 & \cos\nu' & \cos\mu'\\ \cos\nu' & 1 & \cos\lambda'\\ \cos\mu' & \cos\lambda' & 1\end{vmatrix}=0,$$

et par suite les trois équations scalars simultanées

$$\left\{\begin{array}{l}aa'+bb'\cos\nu'+cc'\cos\mu'=0\\ aa'\cos\nu'+bb'+cc'\cos\lambda'=0\\ aa'\cos\mu'+bb'\cos\lambda'+cc'=0,\end{array}\right.$$

ce qui démontre le théorème.

Ainsi l'équation (6) est toujours nulle, quelleque soit la valeur des verseurs, et quelque soit l'ordre des termes, c'est-à-dire, quelleque soit la position des 4 points dans l'espace.

136. *Relations entre les rapports anharmoniques.* — Si nous divisons l'équation (6) par l'un quelconque des termes par cc' par exemple, nous aurons

$$\frac{AA'}{CC'} + \frac{BB'}{CC'} + 1 = 0,$$

et d'après les notations (4) du n° 3, nous aurons

$$M + N^{-1} + 1 = 0.$$

Nous trouverons de même

$$L + M^{-1} + 1 = 0,$$
$$N + L^{-1} + 1 = 0;$$

et si nous y joignons la relation $LMN = 1$, nous voyons que la connaissance d'un rapport anharmonique suffit pour connaître les deux autres. L'on peut donc dire qu'un système de 4 points n'a qu'un rapport harmonique.

Il faut observer que nous laissons le signe des verseurs implicite, c'est-à-dire algébriquement positif. La notion de contour fermé suffira à déterminer explicitement le signe de chaque verseur.

137. *Valeurs particulières du rapport anharmonique.* — 1° $L = 0$, alors on a $BB' = 0$; l'un des facteurs B ou B′ est nul. Alors en se reportant aux notations (1), dans le premier cas, B étant nul, le point c coïncide avec le point a, les deux vecteurs A et C coïncident et sont égaux et de signes contraires, et A′ et C′ coïncident et sont égaux et de même signe. Alors on a $M = -1$ et $N = \infty$. Dans le second cas, B′ étant nul, le point b coïncide avec le point d, alors A et C′ coïncident et sont égaux et de signes contraires, A′ et C coïncident et sont égaux et de même signe et l'on retrouve encore $M = -1$ et $N = \infty$.

2° $L = \infty$, donnera $M = 0$ et $N = -1$, ce que l'on démontrerait directement en prenant $M = 0$.

3° $L = -1$ donne $M = \infty$ et $N = 0$.

Ainsi quand l'un des rapports s'annule, les deux autres deviennent l'unité et l'infini.

4° $L=1$, alors on a $M=\frac{1}{N}$, les deux autres deviennent des verseurs réciproques, et les deux segments BB′, AA′ sont dits conjugués harmoniques. Il y a toujours 6 segments et l'on a toujours implicitement $LNN=1$.

On en conclut que les quatres points $+1$, o, -1, ∞ forment 6 segments conjugués harmoniques. C'est-à-dire que tout couple de vecteurs conjugués forment avec l'origine commune et le point à l'infini un rapport harmonique, et de là naissent tous les rapports anharmoniques par projection du point de l'infini. Réciproquement il y a toujours une direction pour laquelle l'un des points conjugués passe à l'infini, et les deux segments finis deviennent des vecteurs conjugués l'un de l'autre par rapport à la diagonale allant à l'infini.

Observons que tous les théorèmes, qui sont indépendants de la situation de 4 points, resteront vrais sans modification, quand ces 4 points seront dans un même plan, ou sur une même droite, pourvu qu'ils satisfassent à la relation fondamentale (6), prise sous la forme cartésienne implicite. Ce principe va nous conduire à trouver la forme générale de l'homographie, qui est plus compliquée que l'équation de l'homographie pour 4 points sur une même droite.

§ II. — De l'homographie

138. *Définition.* — Quand deux systèmes de quatre points (a, b, c, d) et (a', b', c', d'), qui se correspondent chacun à chacun, ont un rapport anharmonique égal, on dit que les deux tétraèdres qu'ils forment sont homographiques.

Quand deux faisceaux de 4 droites concourantes ou des 6 plans que ces droites forment deux à deux, ont un

rapport anharmonique égal, ces deux faisceaux sont dits homographiques.

« Quand deux systèmes de quatre points, situés comme on voudra, ou deux systèmes de quatre droites concourantes au même point situées comme on voudra, ont deux rapports anharmoniques correspondants égaux, les deux autres rapports anharmoniques sont aussi égaux chacun à chacun. Cette égalité résulte des relations algébriques entre ces trois rapports, et connaissant l'un d'eux, on en déduit les deux autres (n° 6).

Chacune des égalités

$$L = L', \quad M = M' \quad N = N'$$

comporte les deux autres. »

139. *Homologie*. — Quand deux tétraèdres sont homographiques, si l'on fait coïncider deux points correspondants, dits homologues, les droites qui joignent deux à deux les trois autres points homologues, concourent en un même point, qu'on appelle centre direct d'homologie.

Soit

$$BB'/AA' = B_1B'_1/A_1A_1' = L$$

deux rapports anharmoniques égaux de deux systèmes de quatre points (a, b, c, d) et (a', b', c', d') respectivement. Je dis que si les deux points homologues a et a' coïncident, les trois droites bb', cc' dd', concourent en un même point. Soit O le point de concours des deux premières, ou le point d'intersection des trois plans abb', acc', et bcc', et soit le point d'' où la droite rencontre le plan abd' ; les quatres points a, b', c', d'' ont un rapport anharmonique égal à celui des quatre points a, b, c, d, comme inscrits à un même faisceau ; donc le point d'' coïncide avec le point d', puisque par hypothèse le rapport anharmonique des 4 points a, b', c', d' est égal à celui des quatre points a, b, c, d.

Le même théorème a lieu pour deux faisceaux homographiques de quatre droites concourantes. Si l'on fait coïncider deux rayons homologues, Oa, Oa', les autres rayons homologues se coupent deux à deux en trois points situés sur le même plan, et le rapport anharmonique de ces trois points avec un quatrième point quelconque a, pris sur les deux rayons coïncidents, est commun aux deux systèmes de faisceaux, et ces deux faisceaux ont même rapport anharmonique, comme inscrits à un même système de quatre points.

140. *Théorème de Poncelet.* — Deux tétraèdres dont les droites qui joignent les points homologues concourent en un même point, sont homographiques, puisqu'ils sont inscrits à un même faisceau de 4 droites concourantes.

Réciproquement, si deux tétraèdres, situés comme on voudra, sont homographiques, si l'on joint les sommets homologues, les quatre droites concourent en un même point.

D'une manière corrélative deux faisceaux de 4 droites inscrites à un même tétraèdre, où à un même système de quatre points situés comme on voudra, sont homographiques.

Réciproquement si deux faisceaux sont homographiques, ces droites concourent deux à deux en 4 points, ou sont inscriptibles à un même tétraèdre dont le rapport anharmonique est égal à celui des faisceaux homographiques.

Les plans formés par les 6 faces triangulaires forment deux à deux deux triangles homologues, c'est-à-dire dont les cotés homologues se coupent deux à deux sur une même droite, où sont trois points en lignes droite. Les 12 points d'intersection obtenus de cette manière par les 4 couples de faces triangulaires homologues, se confondent en 6 points. Il sont trois à trois sur 4 droites formant un quadrilatère plan qui est le plan d'homologie. Ces 6 points forment un quadrilatère complet.

Il semblerait que l'on ne fait que répéter les théorèmes de la géométrie plane. Mais il est facile de voir que la généralité de la question est toute autre, car l'on considère 4 points ayant une situation quelconque dans l'espace, et les droites comme des vecteurs ayant des verseurs définis.

141. *L'involution vectorielle.* — Si d'un point O pris pour centre d'une sphère-unité, nous menons les quatre rayons Oa, Ob, Oc, Od, aux quatre points a, b, c, d, ils forment sur la sphère les sommets d'un quadrilatère sphérique, sur lequel on retrouve toutes les propriétés du quadrilatère plan. L'intersection des plans Oca, Obd est sur la sphère le point d'intersection des diagonales du quadrilatère sphérique, répondant aux arètes opposées B et B$'$ du tétraèdre des 4 points dans l'espace. Dans le cas où les quatre points sont dans un même plan, le point d'intersection des diagonales est sur le prolongement de cette intersection sur la sphère. De sorte que tout quadrilatère plan est la projection centrale d'un quadrilatère sphèrique dont le centre est celui de la projection. Dans le cas où les 4 points ne sont plus situés dans un même plan, ils sont toujours la projection centrale d'un quadrilatère sphèrique du faisceau des 4 droites concourantes au point O. Mais les intersections des diagonales se trouvent sur les plus courtes distances des arètes opposées du tétraèdre des 4 points. Les droites qui joignent les points de concours des côtés du quadrilatère sphérique et aux sommets forment deux faisceaux en involution et auxquels répondent 4 autres points, ou un nouveau tétraèdre qui est en involution avec le précédent. On est ainsi conduit à définir le principe de l'involution vectorielle de deux systèmes de quatre points.

Nous voyons qu'en prenant un plan de projection parallèle à l'une des droites d'un des faisceaux conjugués, l'un des points passe à l'infini, et le rapport anharmonique devient un rapport des deux autres arètes opposées.

142. *Rapport anharmonique d'un faisceau.* — La valeur numérique d'un rapport anharmonique de 4 points est proportionnelle à la valeur numérique du rapport anharmonique des perpendiculaires abaissées du centre du faisceau sur les vecteurs des quatre points, pris quatre à quatre. On a en effet

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{ba} = \frac{Oa.Oc}{Oa.Od} \cdot \frac{\beta}{\alpha} : \frac{Ob.Oc}{Ob.Od} \frac{\alpha}{\beta'}$$
$$= \frac{\sin B \ \sin B'}{\sin A \ \sin A'} \cdot \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}.$$

En désignant par l la valeur numérique du rapport anharmonique des quatre points, et par l' la valeur numérique du rapport anharmonique des perpendiculaires, on en conclut que ce rapport est constant, et que ce rapport est celui de la valeur numérique du faisceau. Par conséquent deux systèmes de quatre points (a, b, c, d) et (a', b', c', d') inscrits à un même faisceau, ont des rapports anharmoniques, qui ont la même valeur numérique. Il reste à démontrer qu'ils ont même verseur.

La forme explicite du principe de l'homographie savoir :

$$\frac{\sin B \ \sin B'}{\sin A_1 \sin A'} = \frac{bb'}{aa'},$$

où O est une origine arbitraire, dans le cas de segments pris sur une même droite, est un cas particulier de la forme générale vectorielle. Elle doit, d'après le principe que nous avons exprimé précédemment, présenter une forme cartésienne implicite, c'est-à-dire, indépendante de la valeur des verseurs des 6 segments et des 4 droites concourantes en un même point O, situés comme on voudra dans l'espace.

Si nous reportons à l'équation fondamentale

$$AA' + BB' + CC' = o,$$

en remettant les lettres des quatre points, savoir :

$$bc.\ cd + ca.\ bd + ab.\ cd = 0,$$

nous aurons en prenant pour origine commune des quatre points a, b, c, d, le point O, les trois expressions qui sont vectoriellement distinctes, savoir :

$$\left\{\begin{aligned} \overline{Ob}.\overline{Oc}.\overline{Oa}.\overline{Od} &= Ob.Oc.Oa.Od.\ (\cos A + \mathbf{I} \sin A) \\ &\quad (\cos A' + \mathbf{I}' \sin A'), \\ \overline{Oc}.\overline{Oa}.\overline{Ob}.\overline{Od} &= Oc.Oa.Ob.Od.\ (\cos B + \mathbf{J} \sin B) \\ &\quad (\cos B' + \mathbf{J}' \sin B'), \\ \overline{Oa}.\overline{Ob}.\overline{Oc}.\overline{Od} &= Oa.Ob.Oc.Od.\ (\cos C + \mathbf{K} \sin C) \\ &\quad (\cos C' + \mathbf{K}' \sin C'). \end{aligned}\right.$$

Dans le premier membre les droites sont des vecteurs définis, dans le second membre ce sont leurs valeurs modulaires communes dont l'ordre est indifférent.

Nous avons d'ailleurs, par exemple, en se reportant au quadrilatère sphérique, en développant le produit des verseurs,

$$\cos A \cos A' - \sin A \sin A' \cos (\mathbf{II}') = \cos \alpha, \text{ etc.}$$

de sorte qu'en désignant par I la direction perpendiculaire au plan du verseur, on a $\cos \alpha + \mathrm{I} \sin \alpha = \mathrm{Uo}$, où I est la direction des plus courtes distances des côtés opposés du tétraèdre des quatre points inscrits au faisceau.

On a donc pour le rapport anharmonique d'un faisceau

$$\frac{\overline{Oc}.\ \overline{Oa}.\ \overline{Ob}.\ \overline{Od}}{\overline{Ob}.\ \overline{Oc}.\ \overline{Oa}.\ \overline{Od}} = \frac{U_2}{U_1} = \lambda,$$

c'est-à-dire précisément le verseur du rapport anharmonique des 6 vecteurs du tétraèdre des 4 points. De sorte que ce rapport anharmonique est indépendant de la valeur numérique des droites Oa, Ob, Oc, Od, c'est-à-dire de la position des points sur ces droites et conserve la même valeur versorielle quelle que soit l'origine O du faisceau.

De même que nous avons pour les quatre points *a*, *b*, *c*, *d*, l'équation vectorielle

$$AA' + BB' + CC' = o,$$

de même pour les quatre points a, b, c, O, nous avons

$$A.\overline{Oa} + B.\overline{Ob} + C.\overline{Oc} = o,$$

En effet d'après les règles de l'addition vectorielle nous avons évidemment

$$BB' / AA' = \frac{(\overline{Oa}-\overline{Oc})(\overline{Od}-\overline{Ob})}{(\overline{Oc}-\overline{Oa})(\overline{Od}-\overline{Oa})}.$$

Si donc nous développons les produits, savoir :

$$\begin{cases} AA' = \overline{Oc}.\overline{Od} - \overline{Ob}.\overline{Od} - \overline{Oc}.\overline{Oa} + \overline{Ob}.\overline{Oa}, \\ BB' = \overline{Oa}.\overline{Od} - \overline{Oc}.\overline{Od} - \overline{Oa}.\overline{Ob} + \overline{Oc}.\overline{Ob}, \\ CC' = \overline{Ob}.\overline{Od} - \overline{Oa}.\overline{Od} - \overline{Ob}.\overline{Oc} + \overline{Oa}.\overline{Oc}, \end{cases}$$

et si nous additionnons membre à membre, la somme des 6 premiers termes s'évanouit d'elle-même, et la somme des 6 autres se ramène à la forme

$$A\,\overline{Oa} + B\,\overline{Ob} + C\,\overline{Oc},$$

qui d'après le théorème fondamental donne une somme nulle vectoriellement, ce qui devait être.

143. *Conclusion*. — Nous n'avons pas la prétention de donner un traité de géométrie vectorielle nous voulons seulement montrer une application à la géométrie du calcul vectoriel, et prouver que son emploi est nécessaire pour pouvoir passer de la géométrie plane à la géométrie dans l'espace.

Le rapport anharmonique constant de cinq points d'une quadrique aura ainsi la même forme cartésienne implicite,

[illegible] rapport anharmonique constant de 5 points d'une [illegible] [illegible] mêmes théorèmes. Mais il faut [illegible] la détermination d'un point de vecteur [illegible] indépendantes.

[illegible] quelques théorèmes généraux [illegible].

« Le rapport anharmonique de quatre points reste le même quelle que soit la position de ces points sur une [illegible]. »

« Si de quatre points d'une quadrique on mène des vecteurs à un cinquième point, le rapport anharmonique du faisceau a une valeur constante quel que soit le cinquième point.

« Quatre plans tangents fixes d'une quadrique sont rencontrés [illegible] par un cinquième plan tangent en 4 points, qui forment un tétraèdre dont le rapport anharmonique est constant, quel que soit le cinquième plan tangent. En effet, ce rapport est égal à celui du faisceau des quatre droites menées des points de contact des plans tangents au point de contact du cinquième plan, etc.

« On reste la théorie des polaires réciproques démontre que les cordes de contact sont les polaires réciproques des 6 segments, intersection des plans tangents, et les 4 points de ces intersections sont les pôles des plans du faisceau des 4 points de contact. »

VERDUN-SUR-MEUSE. — IMP. L. LAURENT FILS.

